1682

REFLEXÕES
SOBRE A
METAPHYSICA
DO
CALCULO INFINITESIMAL
POR CARNOT,

Membro do Inſtituto Nacional.

PUBLICADAS EM PARIZ NO ANNO DE 1797.

E POR ORDEM DE

SUA ALTEZA REAL
O PRINCIPE
NOSSO SENHOR

TRADUZIDAS DO FRANCEZ

POR

MANOEL JACINTO NOGUEIRA DA GAMA

Cavalleiro Profeſſo na Ordem de S. Bento de Aviz, Bacharel Formado em as Faculdades de Mathematica, e Philoſophia pela Univerſidade de Coimbra, Capitaõ Tenente da Armada Real, e Profeſſor de Mathematica na Academia Real da Marinha.

LISBOA,

Na Offic. de JOAÕ PROCOPIO CORREA DA SILVA,

Impreſſor da Santa Igreja Patriarcal.

ANNO M. DCC. XCVIII.

Impreſſa por ordem de Sua Mageſtade.

Rien n'est peut-etre plus rare en Littérature qu'une Traduction généralement approuvée . . . .

Le Traducteur est dans un état forcé : obligé de marcher sans cesse dans un chemin étroit & glissant qui n'est pas de son choix, & quelque-fois de se jeter à côté pour éviter le précipice. Ainsi, pour le critiquer avec justice, il ne suffit pas de montrer qu'il est tombé dans quelque faute ; il faut le convaincre qu'il pouvoit faire mieux ou aussi bien sans y tomber.

D'ALEMBERT. *Sur l'Art de traduire.*

SENHOR

HE da obrigaçaõ de hum Vaſſallo o comprir as Ordens do Soberano: e porque todo o ſeu merecimento conſiſte na obediencia, como fruto della apreſento ante o Throno de V. ALTEZA REAL huma parte do trabalho, que me foi ordenado, e que executei com a maior ſatisfaçaõ, pela incomparavel honra de ter ſido lembrado para o fazer, naõ obſtante a pequenhez dos meus talentos. Serei feliz, ſe

as

as grandes Luzes de V. ALTEZA o approvarem.

O Ceo guarde a Sagrada Pessoa de V. ALTEZA REAL como ha mister a Naçaõ Portugueza, e o

Seu mais obediente, e fiel Vassallo

Manoel Jacinto Nogueira da Gama.

DISCURSO DO TRADUCTOR.

A Diverſidade das linguas, difficultando a communicaçaõ das luzes reſpectivas aos póvos mais, ou menos inſtruidos de todos os ſeculos, naturalmente tem ſido hum obſtaculo aos progreſſos do Eſpirito humano nas Letras, nas Sciencias, e nas Artes, que dellas dependem. A' proporçaõ que as Nações ſe illumináraõ, devia tornar-ſe mais ſenſivel eſte obſtaculo em razaõ do prejuizo, que cauſava á maſſa dos conhecimentos humanos nas ſuas differentes repartições.

O decurſo dos tempos remediou em parte, taõ grande mal: ſabe-ſe (deixando os ſeculos mais remotos) que entre os Romanos as Letras, e as Sciencias naõ ſó florecêraõ, mas chegáraõ ao maior gráo de eſplendor. Roma, tornando-ſe com a conquiſta de Athenas ſenhora dos grandes conhecimentos da Naçaõ Grega nas Letras, nas Sciencias Phyſicas, Exactas, e nas Moraes, adquirio a grandiſſima vantagem da erudiçaõ a mais agradavel, e da Sciencia a mais profunda daquelles tempos, de cujos conhecimentos, ſe póde dizer, que os Romanos foraõ os depoſitarios.

Baſtára eſta grande vantagem, para fazer indiſpenſavel o conhecimento da lingua Latina, pelo menos, aos que ſe deſtinavaõ á carreira das Letras. Porém os Romanos, querendo vulgarizar o ſeu idioma, tambem empregáraõ meios poſitivos, obrigando á delle uſarem os póvos, que ſubjugavaõ.

Neſtas circunſtancias naõ podia deixar de ſer entaõ muito vulgar a lingua Latina; e nos tempos poſteriores necessariamente conservaria a honrosa prerogativa de ser a lingua dos Sabios.

Assim com effeito aconteceo. A aquisiçaõ do conhecimento deste idioma veio a ser hum objecto de instrucçaõ elementar, e commum aos que se destinavaõ ás Letras, e Sciencias: todas as escólas tanto de Philosophia e Theologia, como de Jurisprudencia e Medicina o adoptáraõ: nelle publicáraõ as Nações cultas e sabias, naõ só os seus escritos elementares, mas tambem os originaes: e veio em fim a servir para a correspondencia dos Sabios das differentes Nações.

Era bem para desejar, naõ só que ainda hoje subsistisse hum tal uso (*), mas que se tivesse feito mais geral, quando naõ podesse ser universal, para facilitar-se a communicaçaõ das luzes respectivas ás differentes Nações, que cultivaõ as Sciencias. Tudo o que tenho dito annunciava, e promettia taõ grande vantagem; mas em vaõ; pois a costumada alternativa em todo o genero das cousas humanas dispunha de longe, e para o futuro huma revoluçaõ, que mal se podia esperar.

Ado-

(*) Nous nous contenterons donc d'exhorter les Savans, & les Corps Littéraires qui n'ont pas encore cessé d'écrire en Langue Latine, à ne point perdre cet utile usage. Autrement il faudroit bientôt qu'un Géometre, un Médecin, un Physicien, fussent instruits de toutes les langues de l'Europe, depuis le Russe jusqu'au Portugais; & il me semble que le progrès des Sciences exactes doit en souffrir. Le temps qu'on donne á l'étude des mots est autant de perdu pour l'étude des choses; & nous avons tant de choses utiles à apprendre, tant de vérités à chercher, & si peu de temps à perdre!

D'ALEMBERT, *sur la Latinité des Modernes.*

Adoptado pelos Sabios o idioma Latino, quaſi ſe havia deſvanecido o inconveniente, e embaraço, que ás Letras, e ás Sciencias cauſava a diverſidade das linguas das diverſas Nações, que as cultivavaõ; mas naõ reſultava ainda daqui toda a vantagem para os livres progreſſos do Eſpirito humano. Tinhaõ na verdade os Sabios o meio de conſpirarem para o adiantamento das Sciencias: mas eſtas ao meſmo tempo eraõ vedadas aos homens, que naõ ſe deſtinavaõ á ellas, e deſte modo ficavaõ reduzidas á hum verdadeiro monopolio, prejudicial ás meſmas Sciencias, e vergonhoſo aos Sabios. Todos os homens tinhaõ igual direito ás Sciencias; e as Sciencias tinhaõ igual direito aos homens de genio, que pelas circunſtancias particulares da ſua condiçaõ civil naõ podeſſem entrar na carreira das Letras. Era por tanto neceſſario abolir-ſe aquelle monopolio vergonhoſo, e abrirem ſe as portas das Sciencias á todos os individuos. Tal foi a principal origem das Traducções em vulgar.

Levados deſte motivo os patriotas ſabios, e inſtruidos das differentes Nações começáraõ a pör em linguagem as principaes obras em todo o genero dos conhecimentos humanos. Neſte trabalho litterario concorreo igualmente com outras a Naçaõ Franceza; e neceſſariamente ſobre todas obteria huma conſideravel vantagem. A grande extenſaõ, e povoaçaõ deſta Naçaõ, a ſua ſituaçaõ cómmoda para o trato com as demais Nações Europeas; o conſideravel numero de homens ſabios, e inſtruidos, que tinha no ſeu ſeio, concorrendo com o genio activo, e deliberado dos nacionaes, com a polidez, clareza, ſimplicidade, e preciſaõ, que caracteriſaõ a lin-

gua

gua Franceza, e facilitaõ ſem dúvida a ſua aquiſiçaõ; com a communicaçaõ, que o genio, e coſtumes nacionaes entretem continuamente entre as peſſoas de todos os eſtados, e os eſpiritos de todas as ordens; em fim com as circunſtancias politicas, que ſempre promoveraõ mais ou menos o goſto das Letras e Sciencias, como nos atteſtaõ os tempos de Carlos V. (*), Franciſco I. (**), e particularmente o de Luís XIV. (***): aquelles motivos, digo, concorrendo com eſtes, por huma parte multiplicáraõ na França as Traducções mais, do que em outro Paiz, e por outra facilitáraõ a ſua extracçaõ para os Eſtrangeiros excitando-lhes o deſejo, e impondo-lhes a neceſſidade de ſe utiliſarem dellas, e das muitas, e importantes obras, que em todos os ramos litterarios ſe publicavaõ.

A grandiſſima vantagem de ſe principiar deſte modo

do

(*) Charles V. le ſage. Les talens eurent en lui un protecteur. Il aimoit les livres & encourageoit les auteurs. M. l'Abbé de Mabli.

(**) François I. ſurnommé le Pere des Lettres. La protection qu'il accorda aux beaux arts, a couvert auprès de la poſtérité la plupart de ſes défauts. Il ſe trouva preciſément dans le temps de la renaiſſance des lettres. M. Gaillard.

(***) Louis XIV. ſurnommé le Grand. Tous les arts furent encouragés au-dedans & meme au-dehors du royaume; 60 ſavans de l'Europe reçurent de Louis XIV. des récompenſes. *Quoi-que le roi ne ſoit pas votre ſouverain*, leur écrivoit Colbert, *il veut être votre bienfaiteur; il vous envoie cette lettre-de-change comme un gage de ſon eſtime.* Ce qui immortaliſe ſur-tout Louis XIV., c'eſt la protection qu'il accorda aux ſciences & aux beaux-arts.

do a vulgarizar a lingua Franceza, a fazia já confiderar pelos Efcritores Nacionaes como propria para communicarem as fuas idéas, e defcubertas ás Nações Eftrangeiras, ao mefmo tempo que as derramaffem na fua. Por outra parte, a Naçaõ propria tendo mais direito ás luzes, e defcobrimentos dos Nacionaes, do que as eftranhas, tinha igualmente a lingua Franceza mais direito aos feus efcritos, do que a Latina. Eftas confiderações, juntas com a maior facilidade de fe efcrever em linguagem, dentro em pouco tempo levaraõ os Francezes a abandonarem a lingua dos Sabios, efcrevendo na fua fómente: e efta foi a época, em que principiou a decadencia do idioma Latino.

Mas era facil de fe prever, que as versões, aquelle mefmo remedio bufcado para fe deftruir completamente o obftaculo, que ás Letras, e ás Sciencias refultava da diverfidade das Linguas, difpunhaõ de longe o renafcimento do mefmo inconveniente, e embaraço.

Efte receio unido ao defejo de communicar aos Eftrangeiros as idéas proprias, e á impoffibilidade de o praticar de outra maneira, fez, que os Sabios das outras Nações continuaffem a eftampar os feus efcritos na lingua Latina. Defte modo por algum tempo ainda confervou efta o direito, que havia adquirido á prerogativa de fer a lingua dos Sabios. Mas em vaõ fe pertendeo fuftentallo. A época da fua total aboliçaõ era chegada; e havendo de fuccumbir as Nações, que a defendiaõ, naõ podiaõ deixar de concorrer com a Franceza a dar-lhe o ultimo golpe.

Na verdade a multiplicidade das Traducções, e dos Livros originaes Francezes refpectivos á todas as claffes

dos

dos conhecimentos humanos impunha a neceſſidade de ſe vulgarizar a lingua Franceza. Os Seculos decimo ſetimo, e decimo oitavo, produzíraõ tantas, e taõ admiraveis obras litterarias, que, a favor das diverſas circunſtancias já ponderadas, conſeguio o idioma Francez o ſer, naõ ſó a lingua dos Sabios, mas ainda a das Nações polidas. Com effeito elle veio a ſer indiſpenſavel aos que ſe deſtinavaõ á carreira das Letras: nelle vieraõ a eſcrever os Sabios das outras Nações muitas das ſuas obras: veio a ſer hum objecto naõ ſó de inſtrucçaõ elementar, mas de educaçaõ civil: veio a ſer adoptado para as correſpondencias litterarias, politicas, e mercantís entre as Nações civiliſadas: veio em fim a ſer a lingua de muitas Cortes da Europa, e dos ſeus Tratados.

No meſmo tempo, em que o idioma Francez parecia ter conſeguido o ſuffragio de todas as Nações cultas, a emulaçaõ as induzia a recuſar-lhe a prerogativa de lingua univerſal, que inſenſivelmente lhe haviaõ concedido. Já naõ era porém tempo de embaraçar, que elle o foſſe; e apenas ſe podia pertender, que o naõ foſſe ſó, ou mais do que os outros. O meio de tal conſeguir-ſe era o conſtituirem-ſe as Nações ſabias, e polidas em huma reciproca dependencia dos ſeus idiomas reſpectivos, eſcrevendo cada huma dellas em linguagem. O exemplo dos Francezes juſtificava hum ſemelhante procedimento, e a maior facilidade de ſe eſcrever em vulgar, facilitava a ſua execuçaõ.

Por tanto ſe deliberáraõ as Nações Europeas a eſcrever nas ſuas reſpectivas linguas, e de tal ſórte o fizeraõ, que dentro em pouco tempo apenas apareciaõ em Latim as obras mais elementares, e que em fim até deſ-

tas

tas mesmas apparecem presentemente em Inglaterra, e Italia muitas em vulgar, como ha tempos, acontece na França. He deste modo que com a Franceza concorreraõ as mais Nações illuminadas a descarregarem o ultimo golpe na lingua Latina, e a fazer renascer o obstaculo, que quizeraõ destruir.

Revivendo por tanto o embaraço da diversidade dos Idiomas, e de mais sendo presentemente tanto maior, e mais nocivo, quanto he maior o número das Nações, que cultivaõ as Letras, as Sciencias, e as Artes, agora mais do que nunca se faz indispensavel o recurso das Traducções. Assim o tem entendido as principaes Nações Europeas. Os Francezes continuaõ a traduzir os escritos principaes das outras Nações. Os Inglezes vertem no seu idioma as melhores Obras dos Alemães, dos Hollandezes, e outros Póvos. Os Italianos, tem feito, e fazem hum extraordinario numero de Traducções. Os Hespanhoes, á medida que se tem illuminado, seguíraõ o exemplo das mais Nações, passando á propria lingua muitas Obras, principalmente das Sciencias naturaes; o mesmo em fim, praticaõ mais ou menos as outras Nações.

E acaso saõ as Traducções hum recurso proporcionado ao inconveniente, e embaraço, que resultaõ da diversidade das linguas? De nenhum modo o saõ, particularmente nas circunstancias, e estado actual da Republica Litteraria. Com effeito saõ muitas as Nações, que cultivaõ as Sciencias nos seus differentes ramos, e applicações: he extraordinario o numero dos Sabios, que se propoem, e procuraõ com incansavel trabalho profundar cada huma das mais limitadas divisões dos differentes ramos do saber humano; saõ em consequencia immenſas as deſcobertas, que todos os dias ſe fazem em cada Naçaõ: e aſſim o eſpirito humano faz progreſſos rapidiſſimos, e a maſſa dos ſeus conhecimentos creſce ſem limite.

Deſte modo eſtaõ as Traducções bem longe de poderem com os ſeus paſſos ſempre vagaroſos, e tardios acompanhar a marcha veloz dos conhecimentos humanos, e por iſſo naõ ſaõ, torno a dizer, hum recurſo proporcionado ao inconveniente, e embaraço da diverſidade das linguas: Mas ſem dúvida ſaõ o unico, e tanto baſta, para que, remediando-ſe ao meſmo tempo em grande parte o inconveniente talvez inevitavel da diverſidade dos idiomas, ſe devaõ reputar de huma abſoluta neceſſidade, e ao meſmo tempo de utilidade bem manifeſta.

Na verdade, ſenaõ foſſem as Traducções, ſer-nos-hiaõ mais ou menos vedados os theſouros, que poſſuem as linguas tanto antigas, como modernas, e em qualquer dellas perderiamos immenſas riquezas, e precioſidades nos diverſos ramos litterarios.

Na lingua Hebraica, e nas outras Orientaes, como na Chaldaica, na Syriaca, na Arabica, &c. ſe nos occultariaõ os mais precioſos conhecimentos relativos á Theologia, á origem dos Póvos, da idolatria, da fabula, em huma palavra os fundamentos mais ſeguros da Hiſtoria, e as chaves da Mythologia.

Na lingua Grega experimentariamos a perda incalculavel dos mais perfeitos meſtres, e modelos em todos os generos, na Poeſia, na Eloquencia, na Hiſtoria, na Philoſophia moral, na Geometria, na Phyſica, na Hiſtoria natural, na Medicina, na Geografia antiga, &c. além dos ſoccorros, que ella fornece a Theologia, e a

in-

intelligencia dos termos technicos univerſalmente recebidos.

De que luzes, em fim, de que deſcobrimentos, e para dizer tudo de huma vez, de quantas obras excellentes, e precioſas em todo o genero ſeriaõ privados aquelles que, ignorando as linguas Latina, Alemã, Ingleza, Italiana, Franceza, além das mais, que, ainda que menos, concorrem todavia para o augmento dos conhecimentos humanos, que ignorando, torno a dizer, as principaes linguas da Europa, naõ foſſem indemniſados pelo meio unico das Traducções?

Para aſſim concluirmos, baſta lembrarmo-nos do eſplendor litterario dos Romanos, principalmente no tempo de Auguſto, e de que pelos Sabios foi adoptada a lingua Latina: que em Alemaõ ha muitas, e excellentes obras ſobre a Juriſprudencia, Medicina, Sciencias exactas e naturaes, principalmente ſobre a Mineralogia, e Metallurgia: que a lingua Ingleza tem immenſas riquezas em Mathematicas, Phyſica, Chymica, Medicina, Cirurgia, Moral, Politica, Artes, Commercio, &c.: que a Italiana, além de outras riquezas, offerece o mais vaſto campo á Litteratura, e ao eſtudo das Artes, e da Hiſtoria: e em fim que na lingua Franceza ſe encontraõ Philoſophos, e Geometras da primeira ordem, Medicos eruditos, e experimentados, Cirurgiões inventores, grandes Metaphyſicos, ſabios, e laborioſos Antiquarios, Artiſtas habeis, Poetas, e Oradores ſublimes, que fazem honra á humanidade.

As Traducções naõ ſó nos abrem os theſouros, e franqueaõ as precioſidades, que poſſuem as linguas antigas, e modernas, mas facilitando a aquiſiçaõ dos conhecimentos, e deſcobertas dos Eſtrangeiros, nos poem, e nos conſervaõ ao nivel de todas as Nações cultas, e ſabias: eſpalhaõ o goſto das Sciencias: fazem conhecer as ſuas applicações, e vantagens: moſtraõ os intereſſes, que dellas pódem tirar no moral, e no phyſico o homem em particular, e a Sociedade em geral: enriquecem as linguas com hum grande numero de termos technicos, e expreſsões adoptadas pelos Sabios: e finalmente fazem ás meſmas Sciencias o grande ſerviço de darem occaſiaõ a deſenvolverem-ſe genios, que aliás ficariaõ perdidos com hum dano irreparavel.

Talvez que, tudo quanto tenho dito, ſeja tido em pouca monta por aquelles, que, poſſuindo o conhecimento das linguas, pódem adquirir as idéas, que nellas ſe encerraõ. Mas ouſo affirmar, que ſó negará a vantagem das Traducções, quem naõ tiver ſenſo commum, ou quem loucamente pertender o monopolio das Sciencias. Com effeito, naõ podendo conceber hum homem ſabio ſem o ſoccorro das idéas dos ſeus antepaſſados, e dos ſeus coevos, ſuppoſta a diverſidade das linguas, quem poderá jactar-ſe, de que poſſue o conhecimento de tantos, e taõ diverſos idiomas, em que ſe achaõ immenſas riquezas litterarias, e que ao meſmo tempo poſſue eſtas riquezas? O eſtudo material, e philoſophico das linguas naõ ſeria huma tarefa talvez exuberante para o curto tempo da vida humana? E que tempo ſobraria para o eſtudo das Sciencias, que nellas ſe occultaõ?

Naõ poſſo ſuppor, que ſe me reſponderá, que baſta o conhecimento das linguas maĩs ſabias, como a Ingleza, Franceza, Alemã, para podermos tirar todo o partido dos conhecimentos humanos, pois que neſtas ſe

achaõ

achaõ traduzidas todas as obras uteis dos antigos, e modernos: por quanto seria huma manifesta contradiçaõ, e huma decidida vontade de estabelecer-se o vergonhoso monopolio das Sciencias, huma vez que naõ fossem estes idiomas communs a todos os homens. Bem sei que, os que os possuem, escusaõ a maior parte das Traducções; e que acostumados á linguagem do original, e preoccupados em favor das suas expressões, só dellas lançaõ maõ para lerem huma ou outra pagina, em que elles mesmos encontrariaõ as maiores difficuldades, com o unico fim de descobrirem as fraquezas do Traductor, divirtindo-se em criticallo: bem sei que esta será a sorte (*) da presente Memoria, que vai apparecer no idioma Portuguez. Mas além da obrigaçaõ que tenho de obedecer ás Reaes Ordens, quanta naõ he a minha satisfaçaõ, lembrando-me da utilidade, que resulta desta, e de outras versões em vulgar, aos que ignoraõ a lingua Franceza! Quem, possuindo o mais pequeno gráo de patriotismo, naõ reconhecerá que, além das vantagens, que tenho exposto, por meio das Traducções naõ só ficaõ entre nós as somas pecuniarias, que absorve a aquisiçaõ dos Livros Estrangeiros, sobremaneira difficeis, e caros, mas se entretem, e augmentaõ as nossas Typografias, ficando entre os nossos convassallos a maõ de obra, e sendo compradas as versões em linguagem por muito menor preço!

Mas,

(*) La seule grace que je désire d'obtenir de ceux que je reconnois por mes vrais Juges, c'est de ne point se borner à relever mes fautes, mais de m'offrir en même temps le moyen de les corriger quand ils les auront apperçues.

D'Alembert. *Sur l'Art de traduire.*

Mas por ventura pódem as Traducções ſómente per ſi trazer aos particulares, e á Naçaõ tantas, e taõ grandes vantagens? Naõ certamente: he preciſo que em ſeu ſoccorro venha a maõ poderoſa do governo, e que com ellas conſpire a procurar, e a obter taõ vantajoſo fim. As Traducções abrem as portas das Sciencias: os eſtabelecimentos litterarios animaõ, e movem os nacionaes a abraçallas, facilitando-lhes a ſua cultura; mas o Miniſterio he ſó quem póde com as ſuas viſtas e meios politicos fomentallas, e promovellas.

E ſendo iſto aſſim, quanto naõ devemos eſperar do noſſo Augusto Principe que pelas ſuas luzes, bem fundados ſyſtemas, e pelas ſuas piedoſas viſtas unicamente dirigidas á felicidade dos ſeus venturoſos Vaſſallos, tem concedido a mais decidida Protecçaõ ás Letras, ás Sciencias, e ás Artes em geral, e o mais favoravel acolhimento a quem as cultiva? Fallem por mim os Eſcritos Nacionaes, e as Traducções que já ſe tem publicado por Ordem, e á cuſta de hum Principe o melhor dos Principes: digaõ as Imprenſas de quantas Obras originaes, e Traducções ſe achaõ actualmente carregadas, e vaõ a ſer publicadas? Que vantagens naõ promettem aos particulares, e á Naçaõ Portugueza as verſões em vulgar, que o ſeu Piedoſo, e Sabio Principe tem mandado fazer de tudo quanto ſe acha eſcrito nos diverſos idiomas das Nações mais illuminadas tendentes á reforma, e melhoramento das Artes, e da Agricultura! Que immenſas riquezas ſe naõ tem perdido pela falta de conhecimento dos adequados meios, que ſe devem empregar na cultura, e fabrico dos importantes ramos do noſſo Commercio, e de outros muitos, que ſe pódem introduzir! E á quantо por conſequencia naõ ſerá augmentada a opulencia da Naçaõ Portugueza, hindo a ſer inſtruida de todos os conhecimentos, que lhe ſaõ neceſſarios!

Acaſo porém as Mathematicas, e a Philoſophia ſeraõ excluidas da Protecçaõ do Nosso Augusto Principe? Naõ certamente: elle em particular as favorece reconhecendo, que as Sciencias exactas, e naturaes ſaõ o fundamento, e o movel mais ſeguro de todas as Artes, e conhecimentos uteis, donde dimanaõ as riquezas, a ſegurança do Eſtado, e a felicidade dos Póvos. Sirvaõ de próva a conſervaçaõ, o adiantamento dos Eſtabelecimentos Mathematicos e Phyloſophicos, e o acolhimento que em taõ Benefico Principe encontraõ os Vaſſallos nelles empregados, e os que ſe applicaõ á taõ importantes Sciencias: ſirva de prova a preſente Memoria, que por Ordem e deſpeza ſua ſe publica no idioma Portuguez com decidida vantagem dos que ſe applicaõ á Mathematica, e que naõ podendo conſultar o original por falta de conhecimento da lingua Franceza, como acontece á muitos dos Diſcipulos, que frequentaõ a Univerſidade, e as noſſas Academias, do que eu meſmo ſou teſtemunha, ficariaõ privados das boas idéas, que nella ſe contem, e reduzidos unicamente ás explicações dos ſeus reſpectivos Meſtres, que ainda ſendo, como ſaõ, de todo o merecimento, e de todas as luzes, naõ deixaráõ de produzir menor effeito, por ſerem dictadas de viva voz, e por conſequencia ſujeitas ao eſquecimento: ſirvaõ de próva outras muitas, que ſe achaõ encarregadas a diverſos Vaſſallos, e a que actualmente fica a imprimir-ſe publicada em Pariz no anno de 1797 por M. de la Granje, na qual ſe expoem a *Theorica das Funções analyticas contendo os principios do cal-*

cu-

culo differencial e integral livres de toda a consideraçaõ de infinitesimos ou desvanecentes, de limites ou de fluxões, e reduzidos á Analyse Algebrica das quantidades finitas, de cuja Traducçaõ tambem tive a honra de ser incumbido por Ordem do mesmo Senhor.

Naõ menos podiamos esperar de hum PRINCIPE Sabio: de hum PRINCIPE digno de o ser, como he, e será para gloria, e felicidade da sempre leal, e reconhecida Naçaõ Portugueza: de hum PRINCIPE finalmente, que conhece a causa do esplendor, e opulencia das principaes Nações Europeas.

AD-

ADVERTENCIA.

ALguns annos ha que eſtas Reflexões foraõ reduzidas poı ſeu Author á fórma, em que agora ſe publicaõ. A importancia dos cuidados, de que ſe acha actualmente encarregado, naõ lhe permitte tornar ás ſuas primeiras meditações; porém como tudo annuncia que a cultura das Mathematicas vai ſer de novo promovida, julgamos conveniente o conhecimento de huma Memoria, na qual a Metaphyſica do Calculo differencial ampla, e exactamente he diſcutida, e ſe achaõ aproximados os diverſos pontos de viſta, debaixo dos quaes tem ſido apreſentada.

ADVERTENCIA.

Alguns annos ha que estas Reflexões forão reduzidas por seu Author á fórma em que agora se publicão. A importancia dos cuidados, de que se achava actualmente encarregado, não lhe permitte tornar ás suas primeiras meditações; porém como tudo annuncia que a cultura das Mathematicas vai ser de novo promovida, julgamos conveniente o conhecimento de huma Memoria, na qual a Metaphysica do Calculo differencial ampla, e claramente he discutida, e se achão aproximados os diversos pontos de vista, debaixo dos quaes tem sido apresentada.

REFLEXÕES
SOBRE A
METAPHYSICA
DO
CALCULO INFINITESIMAL.

1. NAõ ha deſcoberta que produziſſe nas Sciencias Mathematicas huma revoluçaõ taõ feliz, e prompta, como a da Analyſe infiniteſimal; nenhuma tem offerecido mais ſimples, e efficazes meios á indagaçaõ, e conhecimento das leis da natureza: decompondo, por aſſim dizer, os córpos, até aos ſeus elementos, parece ter indicado a ſua eſtructura interior, e a ſua organiſaçaõ: mas como tudo o que he extremo foge aos ſentidos, e á imaginaçaõ, ſómente ſe tem podido formar huma idéa imperfeita deſtes elementos, eſpecies de entes ſingulares, que, ora repreſentaõ verdadeiras quantidades, ora devem ſer tratados como abſolutamente nullos, e parecem em razaõ das ſuas equivocas propriedades, ter o meio entre a grandeza e a cifra, entre a exiſtencia e o nada (*).

Objecto deſta Memoria.

A ii Fe-

(*) Fallo agora conforme ás idéas vagas, que de ordinario ſe fazem das quantidades infiniteſimaes, naõ havendo o trabalho de examinar-ſe a ſua natureza; porém na

Felizmente esta difficuldade nada tem obstado aos progressos de huma tal descoberta : ha certas idéas primitivas que sempre deixaõ em alguma escuridade o nosso espirito ; mas cujas consequencias, huma vez tiradas, abrem campo vasto, e facil de ser corrido. Assim pareceo a do infinito, fazendo delle muitos Geometras o mais feliz uso, sem talvez terem investigado a sua noçaõ : com tudo os Philosophos naõ podendo contentar-se com huma idéa taõ vaga, quizeraõ remontar aos principios ; mas acháraõ-se entre si divididos em opiniões, ou antes no modo de encarar os objectos. Proponho-me na presente Memoria aproximar estes differentes pontos de vista, mostrar as suas relações, e expor outros novos ; julgarei bem recompensado o meu trabalho, se conseguir lançar alguma luz sobre taõ interessante objecto.

Origem provavel da analyse infinitesimal.

2. A difficuldade, que muitas vezes se encontra em exprimirem-se exactamente por equações as diversas condições de hum problema, e em resolverem-se estas equações, podia dar origem ás primeiras idéas do Calculo infinitesimal. Com effeito, quando he muito difficil o obter-se a soluçaõ exacta de huma questaõ, he natural o

---

verdade, naõ ha cousa mais simples, do que a noçaõ destas quantidades. Com effeito, dizer que huma quantidade he infinitamente pequena, he precisamente dizer que ella he a differença de duas grandezas que tem por limite huma mesma terceira grandeza, e nada mais. Naõ he por tanto a idéa de huma quantidade infinitesimal mais difficil de ser concebida, do que a de hum limite : tendo de mais a vantagem, como todos confessaõ, de conduzir a huma theoria muito mais simples.

o procurar-se ao menos huma aproximada quanto he possivel, desprezando-se as quantidades, que difficultaõ as combinações, se àcaso se conhece que taes desprezos naõ causaraõ grande erro no resultado do calculo, em razaõ do seu diminuto valor. He assim, por exemplo, que o trabalho necessario para se descobrirem as propriedades das curvas, as faria talvez contemplar como polygonos de hum grande número de lados. Com effeito, concebendo-se, por exemplo, hum polygono regular inscripto em hum circulo, he evidente, que estas duas figuras, ainda que sempre differentes, e naõ podendo já mais tornar-se identicas, se aproximáraõ cada vez mais, á medida que augmentar o número dos lados do polygono; que seus perimetros, superficies, solidos formados pelas revoluções á roda de hum eixo dado, as linhas analogas tiradas dentro ou fóra destas figuras, os angulos por ellas formados, &c., senaõ forem iguaes respectivamente, ao menos seraõ tanto mais proximos á igualdade, quanto for maior o número dos lados; donde se segue que effectivamente suppondo-se o numero dos lados muito grande, poder-se-haõ sem erro sensivel attribuir ao circulo circunscripto as propriedades pertencentes ao polygono inscripto.

De mais, cada lado deste polygono diminue evidentemente á medida que o seu número augmenta; e por consequencia, suppondo-se o polygono realmente composto de hum grande numero de lados, poder-se-ha tambem dizer que cada hum delles he realmente muito pequeno.

Isto posto, se no decurso de hum calculo, por acaso se achasse huma circunstancia particular, na qual se podessem

ſem ſimplificar muito as operações deſprezando-ſe, por exemplo, hum deſtes pequenos lados em comparaçaõ de huma linha dada, iſto he, empregando-ſe no calculo a linha dada em lugar de huma quantidade igual á ſoma deſta linha, e do pequeno lado de que ſe trata, he claro que naõ haveria inconveniente, porque o erro reſultante ſeria extremamente pequeno, e naõ mereceria o trabalho de ſer conhecido.

3. Proponha-ſe, por exemplo, tirar huma tangente ao ponto dado M da circumferencia $M\,D\,B$. Fig. 1.)

Seja C o centro do circulo, $D\,C\,B$ o eixo; ſuppônhamos a abſciſſa $D\,P = x$, a ordenada correſpondente $M\,P = y$, e $T\,P$ a ſubtangente pedida. Para a acharmos, conſidere-ſe o circulo como hum polygono de grande numero de lados; ſeja $M\,N$ hum deſtes lados; prolongado até ao eixo, ſerá evidentemente a tangente procurada; por quanto naõ paſſa ao interior do polygono; abaixe-ſe a perpendicular $M\,O$ ſobre $N\,Q$, parallela á $M\,P$, e exprima-ſe por a o raio do circulo; teremos evidentemente $M\,O : N\,O :: T\,P : M\,P$, ou

$$\frac{M\,O}{N\,O} = \frac{T\,P}{y}.$$

Além diſto, a equaçaõ da curva para o ponto M ſendo $y^2 = 2\,a\,x - x^2$, ſerá para o ponto N

$$(y + N\,O)^2 = 2\,a\,(x + M\,O) - (x + M\,O)^2,$$

da qual ſubtrahida a antecedente, achada para o ponto M, e feitas as reducções, teremos

$$\frac{M\,O}{N\,O} = \frac{2\,y + N\,O}{2\,a - 2\,x - M\,O}:$$

cu-

cujo valor de $\frac{MO}{NO}$ ſendo igualado ao que a cima ſe achou, e feita a multiplicaçaõ por y, ſe torna em $TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$.

Conhecendo-ſe por tanto MO e NO, ter-ſe-hia o valor procurado de TP; ora MO e NO ſaõ quantidades muito pequenas: pois que cada huma dellas he menor do que o lado MN, o qual já he, por hypotheſe, muito pequeno. Logo (2) ſem erro ſenſivel podemos deſprezar eſtas quantidades em comparaçaõ das quantidades $2y$, e $2x - 2a$, com as quaes ſe achaõ ſomadas. Reduzir-ſe-ha por tanto a equaçaõ á $TP = \frac{y^2}{a - x}$ como convinha achar-ſe.

4. Se eſte reſultado naõ he abſolutamente exacto, ao menos he evidente que na pratica póde como tal paſſar, por ſerem as quantidades MO, NO extremamente pequenas; mas, todo aquelle que naõ tiveſſe alguma idéa da doutrina dos infinitos, admirar-ſe-hia muito, ſe lhe diſſeſſem, que a equaçaõ $TP = \frac{y^2}{a - x}$, naõ ſómente ſe aproxima muito á verdade, mas he perfeitamente exacta; entre tanto com facilidade póde convencer-ſe da verdade deſta propoſiçaõ, procurando o valor de TP, pelo principío de que a tangente he perpendicular á extremidade do raio; por ſer evidente que os triangulos ſemelhantes CPM, MPT daõ $CP : MP :: MP : TP$; donde ſe deduz $TP = \frac{(MP)^2}{CP} = \frac{y^2}{a - x}$, como a cima.

A'primeira viſta ſe devia naturalmente conſiderar como hum ſimples methodo de aproximaçaõ.

Sup-

5. Supponha-se, por segundo exemplo, que se pede a superficie de hum circulo dado.

Consideremos ainda a curva como hum polygono regular de grande número de lados; sendo a superficie de qualquer polygono regular igual ao producto do seu perimetro pela metade da perpendicular tirada do centro sobre qualquer dos lados, a superficie do circulo, considerado como polygono de grande numero de lados, deve ser igual ao producto da sua circunferencia pela metade do raio; proposição taõ exacta como o resultado a cima achado.

6. Ainda que possaõ julgar-se vagas, e pouco exactas as duas expressões *muito grande*, *muito pequeno*, ou outras equivalentes, dos dous exemplos precedentes se deduz a sua utilidade nas combinações mathematicas, e o quanto o seu uso póde facilitar a soluçaõ das diversas questões, que forem propostas; com effeito huma vez admittida a sua noçaõ, todas as curvas, á maneira do circulo, poderáõ ser consideradas como polygonos de grande numero de lados, todas as superficies poderaõ ser divididas em muitas faixas ou zonas, todos os corpos em corpusculos, todas as quantidades, em huma palavra, poderaõ ser decompostas em particulas da sua mesma especie. Daqui nascem muitas relações, e novas combinações, e pelos exemplos a cima expostos se póde facilmente julgar das utilidades, e recursos que deve ministrar ao calculo a introducçaõ destas quantidades elementares.

7. Mas a vantagem, que dellas resulta, he muito

maior

maior do que á primeira viſta ſe podia eſperar; porque dos exemplos antecedentes, ſe deduz que eſte methodo, primeiramente conſiderado como hum ſimples methodo de aproximaçaõ, conduz ao menos, em certos caſos, á reſultados perfeitamente exactos. Seria por tanto intereſſante o ſaber-ſe diſtinguir os caſos, em que tal acontece, e reduzir á elles todos os outros quanto for poſſivel, mudando-ſe deſte modo hum methodo de aproximaçaõ em hum calculo perfeitamente exacto, e rigoroſo. Tal he o objecto da analyſe infiniteſimal.

Depois ſe conheceo, que a pezar dos erros comettidos na expreſſaõ das condições de cada problema, eraõ os reſultados perfeitamente exactos.

8. Vejamos agora como na equaçaõ $TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$ (3) deſprezando-ſe MO e NO naõ ſe alterou a exactidaõ do reſultado, ou como ſe tornou exacto pela ſupreſſaõ deſtas quantidades, e porque o naõ era antes.

Póde muito ſimplesmente dar-ſe a razaõ do que aconteceo na ſoluçaõ do problema reſolvido a cima, notando-ſe que ſendo falſa a hypotheſe, por ſer abſolutamente impoſſivel que hum circulo já mais poſſa ſer conſiderado como hum verdadeiro polygono, ſeja qual for o numero dos ſeus lados, deſta hypotheſe deve reſultar hum qualquer erro na equaçaõ $TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$, e que o reſultado $TP = \frac{y^2}{a-x}$ ſendo certamente exacto, como ſe prova pela comparaçaõ dos triangulos CPM, MPT, ſe poude deſprezar MO, e NO na primeira equaçaõ, e ſe devia fazer eſte deſprezo para rectificar-ſe o calculo, e ſer deſtruido o erro provindo da

 fal-

falſa hypotheſe, da qual ſe havia partido. Deſprezar as quantidades de tal natureza he por tanto naõ ſómente permittido em ſemelhantes caſos, mas neceſſario, e he o unico meio de exprimir exactamente as condições do problema.

Eſtes reſultados tornaõ-ſe exactos por compenſaçaõ de erros.

9. O reſultado exacto $TP = \frac{y^2}{a - x}$ foi por tanto obtido por huma compenſaçaõ de erros; e póde fazer-ſe ainda mais ſenſivel eſta compenſaçaõ, tratando-ſe o exemplo a cima referido de hum modo differente, qual o de conſiderar o circulo como verdadeira curva, e naõ como polygono.

Para eſte fim, por hum ponto R, tomado arbitrariamente a qualquer diſtancia do ponto M, tire-ſe a linha RS parallela á MP, e pelos pontos R, e M a ſeccante RT': teremos evidentemente $T'P : MP :: MZ : RZ$, donde $T'P$, ou $TP + T'T = MP \frac{MZ}{RZ}$. Iſto poſto, imaginando-ſe que RS ſe move parallelamente á ſi meſmo, aproximando-ſe continuamente á MP, he evidente que o ponto T' ſe aproximará ao meſmo tempo cada vez mais ao ponto T, e que por conſequencia poder-ſe-ha fazer a linha $T'T$ taõ pequena, quanto ſe quizer, ſem que ceſſe a proporçaõ a cima eſtabelecida. Deſprezando-ſe por tanto eſta quantidade $T'T$ na equaçaõ, que vimos de achar, commetter-ſe-ha na verdade hum erro na equaçaõ $TP = MP \frac{MZ}{RZ}$ á que a primeira fica reduzida; mas poder-ſe-ha diminuir eſte erro quanto ſe quizer, fazendo-ſe aproximar RS á MP quanto for neceſſario: o que indica, que a razaõ dos dous membros deſta equa-

çaõ

çaõ differirá taõ pouco, quanto se quizer da razaõ de igualdade.

Semelhantemente a equaçaõ $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a-2x-MZ}$ (3) he perfeitamente exacta, seja qual for a posiçaõ do ponto R, ou quaesquer que sejaõ os valores de MZ, e de RZ. Porém quanto mais RS se aproximar á MP, tanto mais seraõ pequenas as linhas MZ e RZ; e por isso, sendo desprezadas no segundo membro da equaçaõ, o erro, que resultar em $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, poderá ser feito taõ pequeno quanto se julgar conveniente.

Isto posto, sem attender-se á erros, de cuja attenuaçaõ somos senhores até ao ponto que nos parecer, tratando-se como perfeitamente exactas as duas equações já achadas $TP = MP\frac{MZ}{RZ}$, e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, e substituindo-se na segunda o valor de $\frac{MZ}{RZ}$ tirado da primeira, teremos $TP = \frac{y^2}{a-x}$ como a cima.

Este resultado he exacto, por ser conforme ao deduzido pela comparaçaõ dos triangulos CPM, MPT; e entre tanto saõ certamente falsas ambas as equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$, e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ das quaes foi deduzido, pois que a distancia de RS á MP naõ foi supposta nulla, nem ao menos muito pequena, mas sim igual á huma qualquer linha arbitraria. Logo he absolutamente necessario que os erros se hajaõ mutuamente compensado por meio da comparaçaõ das duas equações erroneas.

 Eis-

10. Eis-aqui por tanto obtido, e bem provado o facto dos erros compensados; trata-se agora da sua explicaçaõ, e de achar-se o final, que mostra ter tido lugar a compensaçaõ nos calculos semelhantes ao precedente, e os meios de a occasionar em cada caso particular.

Porque acontece esta compensaçaõ. Ora para isto basta notar-se que os erros commettidos nas equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$, e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ podendo ser feitos taõ pequenos quanto se quizer, o erro que tivesse lugar na equaçaõ resultante $TP = \frac{y^2}{a-x}$, poderia igualmente ser feito taõ pequeno quanto se quizesse, e que elle dependeria da distancia arbitraria das linhas MP, RS. Mas tal naõ acontece, pois que sendo dado o ponto M, por onde deve passar a tangente, nenhuma das quantidades a, x, y, TP desta equaçaõ he arbitraria; logo naõ póde com effeito haver nella erro algum.

Daqui se deduz que a compensaçaõ dos erros, que se achaõ nas equações $TP = y\frac{MZ}{RZ}$, e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, se manifesta no resultado pela ausencia das quantidades MZ, RZ, que os causavaõ; e que por consequencia, depois de introduzidas no calculo estas quantidades para facilidade da expressaõ das condições do problema, e de serem tratadas nas equações, que exprimem as condições, como nullas em comparaçaõ das quantidades propostas, a fim de simplificarem-se as equações, basta eliminarem-se estas mesmas quantidades das equações, em que ainda se acharem, para desapparecerem os erros por ellas oc-

occaſionados, e obter-ſe hum reſultado perfeitamente exacto.

11. Podia logo o inventor por hum raciocinio bem ſimples ſer conduzido á ſua deſcoberta: ſe em lugar de huma quantidade propoſta, podia elle dizer, ſubſtituo no calculo outra, que lhe naõ ſeja igual, reſultará hum qualquer erro; mas ſe a differença deſtas quantidades for arbitraria, e ſe eu a poder fazer taõ pequena quanto quizer, eſte erro naõ ſerá prejudicial; até poderei commetter ao meſmo tempo outros muitos ſemelhantes, ſem inconveniente algum, pois que eſtarei ſempre ſenhor do gráo de exactidaõ, que quizer dar aos meus reſultados. De mais acreſce, que poderá acontecer, que eſtes erros mutuamente ſe compenſem, e que ſe tornem perfeitamente exactos os meus reſultados. Mas como ſe opera eſta compenſaçaõ, e como em todos os caſos? Pouca reflexaõ baſtará para eſte conhecimento: com effeito, poderia dizer o inventor: ſupponha-ſe por hum inſtante, que tem lugar a compenſaçaõ deſejada, e vejamos porque ſinal he manifeſtada no reſultado do calculo. Ora, deve naturalmente acontecer, que tendo deſaparecido as quantidades, que taes erros occaſionaõ, tambem deſapareçaõ os meſmos erros; porque eſtas quantidades (como MZ, RZ) tendo por hypotheſe valores arbitrarios, naõ devem entrar nas formulas ou reſultados, que o naõ ſaõ, e que havendo ficado exactos por ſuppoſiçaõ, dependem unicamente, naõ da vontade do calculador, mas da natureza das couſas, cuja relaçaõ ſe havia propoſto achar expreſſa por eſtes reſultados. Logo o ſinal, que annuncia ter acontecido a deſejada compenſaçaõ, he

Como se póde effeituar esta compensação em cada caso particular.

a ausencia das quantidades arbitrarias, que produziaõ os erros; e por tanto, para effeituar-se a compensaçaõ, basta eliminarem-se as quantidades arbitrarias.

12. Para fixar mais estas idéas, e dar aos principios, que dellas emanaõ, o conveniente gráo de exactidaõ, e generalidade, notarei que as quantidades consideradas na questaõ tratada, pódem ser distinguidas em duas classes; a primeira, composta de quantidades que, como MC, MP, PT, MT, saõ ou dadas ou determinadas pelas condições do problema; e a segunda, composta de quantidades que, como RS, RT', ST', dependem da posiçaõ arbitraria do ponto R, e taes ao mesmo tempo, que á medida que o ponto R se avisinha ao ponto M, cada huma dellas se aproxima á sua correspondente na primeira classe, de sórte que MP, por exemplo, he o limite de RS, quero dizer, o termo fixo á que continuamente se aproxima, ou o seu ultimo valor; do mesmo modo MT he o limite ou ultimo valor de RT', e PT o de ST'; pela mesma razaõ, he claro que os limites ou ultimos valores de MZ, RZ, MR, $T'T$, saõ todos o; por ultimo he tambem evidente que a ultima razaõ de RS para MP, isto he, o ultimo valor de $\frac{RS}{MP}$ he huma razaõ de igualdade, bem como o de RT' para MT, o de ST' para PT, ou, em fim, o de toda a quantidade para o seu limite.

13. Por tanto agora, para estender estas reflexões aos outros problemas do mesmo genero, imaginemos hum

qual-

qualquer fyftema de quantidades propoftas, cujas razões queremos defcobrir (*).

14. Principiarei por exprimir pelo nome de *quantidades defignadas* naõ fó todas as que faõ propoftas no enunciado da queftaõ, mas ainda todas as que dependem deftas quantidades fómente, quero dizer, que faõ funções deftas mefmas quantidades, e de alguma outra.

Cha-

(*) Aqui fupponho que a queftaõ propofta foi precedentemente reduzida a acharem-fe com effeito as razões que exiftem entre taes, ou taes quantidades propoftas. Pertendendo-fe, por exemplo, achar huma curva, que tenha certa propriedade determinada, fupponho que precedentemente fe reduzio efta queftaõ a achar-fe a razaõ, que exifte entre tal ordenada defta curva, e a abfciffa correfpondente; do mefmo modo, querendo-fe tirar huma tangente á hum ponto indeterminado defta curva, principio por fixar arbitrariamente o ponto por onde quero tirar efta tangente, e reduzo a queftaõ a achar a razaõ que exifte, por exemplo, entre a fubtangente, e a abfciffa, ou entre a ordenada, e a fubnormal correfpondente á efte mefmo ponto. Mas perguntando-feme, por exemplo, como applicarei a diffiniçaõ do *infinito*, que vou dar, á eftas queftões: *A materia he divifivel ao infinito? O efpaço em que exiftem todos os entes creados he infinito?* e outras femelhantes; refpondo que a minha diffiniçaõ fó pertence ao infinito mathematico; que fómente póde fer applicada ás queftões cujo unico objecto he o achar as razões, que exiftem entre taes, e taes quantidades; e que por iffo as queftões metaphyficas a cima propoftas, fe merecem fer chamadas queftões, naõ pertencem de modo algum á theoria, cujos principios me proponho eftabelecer.

15. Chamarei, ao contrario, *quantidades naõ designadas*, ou *auxiliares* todas as que naõ fazem parte do systema das quantidades designadas, e que por consequencia naõ entraõ essencialmente no calculo, mas saõ introduzidas sómente para facilitarem a comparaçaõ das quantidades propostas.

Assim, no exemplo precedente, MP, MC, MT, DP, &c., saõ quantidades *designadas*, porque dependem unicamente da posiçaõ do ponto M por onde a tangente deve ser tirada; porém RS, e todas as suas dependentes, como MZ, RZ, $T'T$, $T'P$, &c. saõ quantidades *auxiliares*, porque foraõ tiradas para facilidade da soluçaõ da questaõ, na qual se pertendia a razaõ de MP para TP.

Daqui segue-se evidentemente, que em toda a quantidade *naõ designada* necessariamente ha alguma cousa de arbitrario; porque, senaõ houvesse, o seu valor seria assinado pelas condiçoes do problema, e por consequencia dependeria totalmente das quantidades propostas, o que he contra a hypothese.

16. Quando em mathematica duas linhas, duas superficies, dous solidos, em fim duas quaesquer quantidades saõ suppostas aproximarem-se huma á outra continuamente por gráos insensiveis, de maneira que a sua razaõ ou quociente diffira cada vez menos, e taõ pouco quanto se quizer da unidade, se diz que estas duas quantidades tem por ultima razaõ huma razaõ de igualdade.

17. Se huma destas grandezas he designada, e a outra

tra auxiliar, chamar-se-ha a primeira *limite* ou *ultimo valor* da segunda: quero dizer, que hum limite naõ he outra cousa mais, do que huma quantidade designada, á qual se aproxima continuamente outra quantidade auxiliar, de maneira que a differença entre ellas possa ser taõ pequena quanto se quizer, e que a sua ultima razaõ seja huma razaõ de igualdade.

Por tanto, sómente as quantidades auxiliares, propriamente fallando, tem o que chamo limite; porque as quantidades designadas sendo suppostas naõ mudar, e serem ao contrario os termos, ou ultimos valores das quantidades auxiliares, naõ podem, estrictamente fallando-se, ter limites, excepto se se differ que toda a quantidade designada he limite de si mesma, o que se naõ póde negar, pois que o ultimo valor de huma quantidade determinada qualquer he a mesma quantidade.

18. Assim, em geral chamamos ultimos valores, e ultimas razões das quantidades os valores ou as razões, que com effeito saõ as ultimas daquellas, que assigna á estas grandezas, e ás suas razões a lei de continuidade, quando cada huma dellas he supposta aproximar-se continuamente, e por degráos insensiveis á quantidade designada, que lhe corresponde.

19. Chama-se em geral quantidade *infinitamente pequena* a differença de huma quantidade qualquer auxiliar ao seu limite; assim, por exemplo, RZ, differença entre RS e MP, he o que se chama quantidade infinitamente pequena.

20. Ao contrario chama-ſe *infinita* ou *infinitamente grande*, toda a grandeza que he igual á unidade dividida por huma quantidade infinitamente pequena; tal he, por conſequencia, $\frac{1}{RZ}$ ou $\frac{1}{RS - MP}$.

Mas como o limite ou ultimo valor de RS he MP, he claro que o limite ou ultimo valor de RZ ou $RS - MP$ he o, e que o de $\frac{1}{RZ}$ he $\frac{1}{0}$.

21. Por tanto em geral póde dizer-ſe que *huma grandeza infinitamente pequena naõ he outra couſa mais do que huma quantidade, cujo limite he* o; e que ao contrario *huma quantidade infinitamente grande naõ he outra couſa mais do que huma quantidade, cujo limite he* $\frac{1}{0}$.

22. Deſignaõ-ſe pelo nome de *quantidades infiniteſimaes* as quantidades infinitas ou infinitamente grandes, e as que ſaõ infinitamente pequenas: todas as outras grandezas chamaõ-ſe *quantidades finitas*.

23. Dizer, ſegundo o uſo vulgar, que infinito he o que naõ tem termos, o que naõ tem limite, ou aquillo cujo limite naõ exiſte, he por tanto dar huma idéa ſimples, e que naõ deixa de ter fundamento, pois que com effeito todas as quantidades infiniteſimaes tem por limites, humas o, outras $\frac{1}{0}$, que naõ ſaõ verdadeiras quantidades.

Mas

24. Mas de ferem o ou $\frac{1}{0}$ os limites deftas quantidades, de nenhum modo fe fegue que ellas fejaõ entes quimericos; porque, ao contrario, pela mefma diffiniçaõ (19), huma quantidade infinitamente pequena he a differença de duas quantidades effectivas, a faber, huma auxiliar, e o feu limite.

25. Segue-fe ainda, que fe póde contemplar toda a quantidade infinitamente pequena como a differença de duas quantidades auxiliares, que tem por limite huma mefma terceira quantidade defignada; porque, fejaõ X e Y duas quantidades auxiliares differentes, as quaes ambas tenhaõ por limite a quantidade A.

Digo que $X - Y$ he huma quantidade infinitamente pequena. Com effeito, como o limite ou ultimo valor de X he A, e o de Y he tambem A; fegue-fe que o ultimo valor de $X - Y$ ferá $A - A$ ou o. Logo o limite de $A + (X - Y)$ he A; póde-fe por tanto contemplar $X - Y$ como a differença de huma quantidade auxiliar $A + (X - Y)$ ao feu limite A; por confequencia (19) efta differença he huma quantidade infinitamente pequena; póde-fe por tanto dizer em geral que *huma quantidade infinitamente pequena naõ he outra coufa mais do que a differença de duas quantidades auxiliares, que tem o mefmo limite.*

26. Naõ podem duas quantidades ter por limite huma mefma terceira quantidade, fem que tenhaõ entre fi por ultima razaõ huma razaõ de igualdade; porque, como por hypothefe, o limite ou ultimo va-

lor de $\frac{X}{A}$ he 1, bem como o de $\frac{Y}{A}$, he claro que o limite ou ultimo valor de $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)}$ he tambem a unidade. Ora $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)}$ $=\frac{X}{Y}$: logo o limite, ou ultimo valor de $\frac{X}{Y}$ he 1, o que quer dizer, que a ultima razaõ de X para Y he huma razaõ de igualdade. Logo, em geral, póde-ſe dizer que *huma quantidade infinitamente pequena he a razaõ da differença de duas grandezas, que tem entre ſi por ultima razaõ huma razaõ de igualdade.*

Em fim, he evidente que tambem ſe póde dizer que *huma grandeza infinitamente pequena naõ he mais do que huma quantidade naõ deſignada, á qual ſe attribue primeiramente hum qualquer valor arbitrario, que depois ſe ſuppoem decreſcer inſenſivelmente até reduzir-ſe á nada.* Aſſim, em geral, quando ſe diz, *ſeja* Z, *por exemplo, huma quantidade infinitamente pequena*, he preciſamente a meſma couſa que dizer, *ſeja* Z *huma quantidade qualquer arbitraria* (e por conſequencia auxiliar, pois que naõ pódem ſer arbitrarias as quantidades deſignadas) *e ſupponhamos depois que decreſce continuamente até reduzir-ſe á nada.*

28. Huma quantidade he chamada infinitamente pequena, *relativamente* á outra quantidade, quando a razaõ da primeira para a ſegunda he huma quantidade infinitamente pequena: e reciprocamente, a ſegunda ſe chama infinita ou infinitamente grande *relativamente á primeira.*

Duas

29. Duas quantidades se dizem *differir infinitamente pouco*, ou *ser infinitamente pouco differentes* entre si quando a razaõ de huma para a outra differe da unidade taõ sómente em huma quantidade infinitamente pequena, de maneira que a sua ultima razaõ seja huma razaõ de igualdade; taes saõ evidentemente RS, e MP.

30. Chama-se *Calculo infinitesimal* a arte, que ensina a descobrir por meio das quantidades, que acabo de chamar infinitesimaes, as razões ou relações quaesquer existentes entre as diversas partes de hum systema qualquer de quantidades propostas.

Sendo todos os infinitesimaes quantidades auxiliares ou introduzidas no calculo sómente para facilidade da expressaõ das condições propostas, he claro que devem ser absolutamente eliminadas para se obter o desejado resultado, ou as razões procuradas; assim de algum modo se póde dizer, que o calculo infinitesimal he hum calculo *naõ finito*, ou que ainda naõ está acabado, porque com effeito, logo que as quantidades auxiliares saõ eliminadas, e naõ entraõ essencialmente no calculo, deixa este de ser infinitesimal, e se assemelha em tudo ao calculo algebrico ordinario (*).

Para dar fim á explicaçaõ dos principaes termos rela-

(*) Todos sabem que senaõ julga acabado o calculo em que entraõ quantidades infinitesimaes; e que sómente se conta com a exactidaõ do resultado, depois de serem inteiramente eliminadas estas infinitesimaes.

lativos á theoria do infinito em geral, resta-me dizer o que entendo por *equaçaõ imperfeita.*

31. Chamo *equaçaõ imperfeita* toda aquella, cujos membros saõ desiguaes, mas infinitamente pouco differentes hum do outro, ou, toda a equaçaõ, cujos membros, ainda que desiguaes, tem por ultima razaõ huma razaõ de igualdade.

Assim por exemplo, as equações falsas $TP = y\,\frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ achadas (9), saõ as que chamo equações imperfeitas, pois que as quantidades desprezadas nas equações exactas, donde foraõ deduzidas, saõ infinitamente pequenas; he por tanto sobre a theoria destas equações que se funda a soluçaõ da questaõ a cima tratada, e de todas as do mesmo genero; e por isso passo a indagar os principios desta theoria, a qual he a base do calculo infinitesimal, ou, antes, he o mesmo calculo infinitesimal.

THEOREMA I.

Principios fundamentaes da analyse infinitesimal.

32. *SE em lugar de qualquer das quantidades, que entraõ em huma equaçaõ imperfeita, se substitue outra infinitamente pouco differente, ou cuja razaõ para a primeira tenha a unidade por limite ou ultimo valor, a equaçaõ resultante desta transformaçaõ naõ poderá ser falsa, mas será absolutamente exacta, ou ao menos permanecerá imperfeita.*

Com effeito, como por hypothese naõ se fez mais do que substituir em lugar de huma quantidade outra, cu-

cujo ultimo valor he a meſma quantidade, e cuja razaõ para a primeira tem a unidade por limite, he claro que eſta ſubſtituiçaõ naõ podia alterar os ultimos valores dos membros da equaçaõ propoſta, nem a ſua ultima razaõ. Ora, por hypotheſe, eſta ultima razaõ era a unidade antes de feita a ſubſtituiçaõ; logo ainda o ſerá depois; por tanto a equaçaõ conſervará ao menos o caracter daquellas, que chamo imperfeitas, ſenaõ for abſolutamente exacta. *C. S. Q. D.*

THEOREMA II.

33. *Toda a equaçaõ, que ſómente contem quantidades deſignadas, naõ póde ſer imperfeita.*

Os membros de huma equaçaõ imperfeita ſaõ, pela diffiniçaõ, deſiguaes; mas diffirindo infinitamente pouco entre ſi, a ſua razaõ ſe aproxima tanto, quanto ſe quer, á razaõ de igualdade; logo entra neſta equaçaõ alguma quantidade, que naõ faz parte do ſyſtema das quantidades propoſtas; mas por hypotheſe, ao contrario, a equaçaõ propoſta ſómente contém quantidades deſignadas; logo naõ póde ſer huma equaçaõ imperfeita. *C. S. Q. D.*

THEO-

THEOREMA III.

34. *TOda a equaçaõ imperfeita, á que ſe tiverem dado ſómente transformações ſemelhantes á indicada no theorema primeiro, e da qual por meio deſtas transformações ſe tiverem eliminado todas as quantidades naõ deſignadas, ſerá exacta neceſſaria, e rigoroſamente.*

Eſta equaçaõ, pelo theorema primeiro, naõ póde ſer huma equaçaõ abſolutamente falſa, e pelo theorema ſegundo, naõ póde ſer imperfeita; logo ſerá exacta neceſſaria, e rigoroſamente. *C. S. Q.* D.

COROLLARIO.

35. TUdo quanto ſe tem dito a reſpeito das equações imperfeitas, ſe deve entender igualmente das proporções, propoſições, e quaeſquer raciocinios ſuſceptiveis de ſerem expreſſos por ſemelhantes equações.

ESCOLIO.

Em que conſiſte o eſpirito deſta analyſe.

36. TAes ſaõ os principios geraes á que ſe reduz a theorica do calculo infiniteſimal. Delles ſe póde concluir que, tendo-ſe expreſſo por equações imperfeitas as condições de hum problema, ſe depois por transformações ſemelhantes á indicada no theorema primeiro ſe chega a eliminar todas as quantidades auxiliares ou naõ deſignadas, terá neceſſariamente acontecido no curſo do calculo huma compenſaçaõ de erros;

e

e que a vantagem deste calculo consiste em que, sendo muitas vezes difficillimo o serem expressas as condições de huma questaõ exactamente e por equações rigorosas, ao mesmo tempo que o seriaõ facilmente por equações imperfeitas, elle nos subministra os meios de tirar destas equações imperfeitas os mesmos resultados, e razões exactas, que se obteriaõ se as equações primittivas fossem da mais perfeita exactidaõ; e isto pela simples eliminaçaõ das quantidades, cuja presença occasionava taes erros.

He simples a razaõ do que acabamos de dizer: supponha-se que se procuraõ as relações, que existem entre muitas quantidades propostas; sendo difficil acharem-se directamente equações, que exprimaõ estas relações, he natural o recorrer-se a algumas quantidades intermediarias, as quaes sirvaõ de termos de comparaçaõ; por hum tal meio poder-se-haõ obter, quando naõ as mesmas equações procuradas, ao menos outras, nas quaes as quantidades propostas se acharáõ combinadas com as auxiliares; e entaõ só restará a eliminaçaõ destas. Mas, se além disto, os valores das quantidades auxiliares forem arbitrarios, e poderem ser suppostos taõ pequenos quanto se quizer sem alteraçaõ das quantidades propostas, he facil de conhecer-se que, se nas equações, que exprimem as relações procuradas, as quantidades arbitrarias se acharem combinadas com as propostas, cada huma dellas poderá ser decomposta em duas, das quaes huma contenha sómente as quantidades designadas, e a outra as arbitrarias, semelhantemente ao que acontece em huma equaçaõ, que contém quantidades reaes, e imaginarias, a qual se póde decompor em duas, huma entre as quantidades reaes, e a outra entre as imaginarias. Ora, como sómente se necessita da equaçaõ que existe entre as quantidades propostas, he evidente que podemos sem inconveniente, nas equações, em que as quantidades designadas se achaõ combinadas com as arbitrarias, desprezar as que embaraçaõ o calculo, visto que os erros resultantes pertencem sómente á equaçaõ entre as arbitrarias, que ella comprehende. Isto he o que precisamente acontece no calculo infinitesimal, quando se trataõ como nullas, em comparaçaõ das grandezas finitas, as quantidades que temos chamado infinitamente pequenas.

Para fazermos ainda mais sensivel esta explicaçaõ, voltemos ao exemplo a cima exposto. Saõ ambas as equações (9)

$$TP + T'T = y\,\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$$

perfeitamente exactas, sejaõ, quaes forem, os valores de MZ e de RZ; substituindo-se por tanto na segunda o valor de $\frac{MZ}{RZ}$ deduzido da primeira, ter-se-ha

$$\frac{TP + T'T}{y} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

equaçaõ exacta, e que deve subsistir independentemente da distancia arbitraria entre as linhas RS e MP.

Ora, facilmente se conhece a possibilidade de darse a esta equaçaõ a seguinte fórma

$$\left(\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x}\right) + \left(\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right) = 0,$$

na qual o primeiro termo só contém quantidades dadas, ou determinadas pelas condições do problema, e o segundo contém arbitrarias, e póde ser supposto taõ pequeno, quanto se quizer, sem mudança alguma das quantidades

do

do primeiro termo, pois que podemos ſuppor RS taõ proximo á MP, quanto ſe quizer. Logo, ſegundo a theoria das indeterminadas, cada hum dos termos deſta equaçaõ, tomado ſeparadamente, deve ſer igual á cifra; o que dá

$$\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x} = 0, \text{ e } \frac{T'T}{y} - \frac{y.MZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)} = 0,$$

das quaes a primeira ſó contém quantidades deſignadas, e a ſegunda arbitrarias. E como ſómente neceſſitamos da primeira, pois que nos dá o valor procurado de TP, tal qual já foi achado antecedentemente, ſegue-ſe que, quando meſmo tiveſſemos commettido erros no progreſſo do calculo, com tanto que elles ſó recahiſſem ſobre a ultima equaçaõ, em nada ſe alteraria a exactidaõ do reſultado procurado; iſto he o que effectivamente aconteceria, ſe nas equações primitivas tiveſſemos tratado MZ, RZ, e $T'T$ como nullas em comparaçaõ das quantidades propoſtas a, x, y; na verdade commetter-ſe-hiaõ erros na expreſſaõ das condições do problema, mas eſtes entre ſi por compenſaçaõ ſe deſtruiriaõ, e o reſultado, do qual ſe neceſſita, de nenhum modo ſeria alterado.

37. A' viſta do que temos dito, he facil de ſe perceber, que a analyſe infiniteſimal he huma applicaçaõ, ou huma extenſaõ do methodo das indeterminadas; porque, quando ſe deſpreza huma quantidade infinitamente pequena, digo que naõ ſe faz mais, propriamente fallando, do que *ſubentendella*, e naõ ſuppolla nulla; por exemplo, quando em lugar das duas equações (9) exactas

A analyſe infiniteſimal he huma applicaçaõ, ou huma extenſaõ do methodo das indeterminadas.

$$TP + T'T = MP\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

ſe

ſe uſa das duas equações imperfeitas $TP = MP \frac{MZ}{RZ}$ e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$; muito bem ſei que commetto hum erro, e, por aſſim dizer, as ponho mentalmente debaixo deſta forma $\frac{MZ}{RZ} MP = TP + \varphi$, e $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x} + \varphi'$; ſendo φ e φ' quantidades taes, quaes devem ſer, para que ſejaõ exactas eſtas equações; do meſmo modo na equaçaõ $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$, reſultante das meſmas duas imperfeitas, eu ſubentendo a quantidade φ'' tal, que fique exacta a equaçaõ $\left(\frac{TP}{MP} - \frac{y}{a-x}\right) + \varphi'' = 0$; mas immediatamente reconheço que eſta ultima quantidade φ'' he igual á cifra, porque ſenaõ foſſe nulla, ſó poderia ſer infinitamente pequena, naõ havendo quantidade infiniteſimal no primeiro termo; mas iſto he impoſſivel, excepto ſe for cada hum deſtes termos ſeparadamente igual á cifra; logo concluo que ſe tem exactamente $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$; e que por tanto as quantidades φ, φ' e φ'' naõ foraõ ſuprimidas como nullas, mas ſimplesmente foraõ ſubentendidas para ſimplicidade do calculo. Com effeito, tendo-ſe, por exemplo, huma quantidade X arbitraria, que poſſa ſer feita taõ pequena, quanto ſe quizer, e huma equaçaõ deſta forma

$$A + BX + CX^2 + \&c. = 0,$$

na qual A, B, C, &c. ſaõ independentes de X, naõ póde ter lugar eſta equaçaõ, ſem que ſeja $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, &c., iſto he, ſem que cada termo ſeparadamente to-

ma-

mado ſeja igual á nada, independentemente do ſeu número. Ora, pela meſma razaõ, tendo-ſe em geral huma equaçaõ deſta forma, $P + Q = o$, tal que ſeja P huma funçaõ das quantidades dadas ou determinadas pelas condições do problema, e ao contrario, Q huma quantidade, que poſſa ſer ſuppoſta taõ pequena, quanto ſe quizer, ter-ſe-ha neceſſariamente $P = o$, e $Q = o$; mas tal he preciſamente a natureza da equaçaõ a cima achada,

$$\left(\frac{TP}{y} - \frac{y}{a - x}\right) + \left(\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right) = o.$$

Logo cada hum dos ſeus termos, tomado ſeparadamente, he igual á nada; por tanto poder-ſe-hiaõ deſprezar no decurſo do calculo, as quantidades $T'T$, MZ, RZ, as quaes naõ entraõ no primeiro termo, ſem que eſte ſeja alterado; logo a analyſe infiniteſimal ſó differe do methodo das indeterminadas, em ſerem tratadas como nullas, ou antes em ſerem ſubentendidas no decurſo do calculo as quantidades, que per ſi meſmo houveſſem de deſtruir-ſe no reſultado, quando as deixaſſemos ſubſiſtir; em lugar de que no methodo das indeterminadas no fim do calculo he que ſe fazem deſaparecer as quantidades arbitrarias, que devem ſer eliminadas. Poderia por tanto eſte ultimo methodo ſuprir muito facilmente a analyſe infiniteſimal ſem o ſoccorro das equações imperfeitas, e ſem já mais ſe commetter erro algum no decurſo do calculo.

38. Ainda ha outro meio de ſuprir a analyſe infiniteſimal pelo calculo algebrico ordinario: e vem a ſer o methodo dos limites ou ultimas razões. Porque, naõ obſtante fundar-ſe eſta analyſe inteiramente ſobre a pro-

priedade dos limites, e ultimas razões, differe do que se chama propriamente methodo dos limites, em que neste naõ se fazem entrar separadamente no calculo as quantidades que havemos chamado infinitesimaes, nem ainda as suas razões, mas sómente os ultimos valores destas razões, os quaes, sendo quantidades finitas, fazem deste methodo, naõ hum calculo particular, como havemos dito, mas huma simples applicaçaõ do calculo algebrico ordinario.

Trata-se por tanto, limitando-nos a introduzir na algebra ordinaria as ultimas razões das quantidades infinitesimaes em vez das mesmas infinitesimaes, de suprir os meios, que a analyse infinitesimal dá para o descobrimento das propriedades, razões e relações quasquer das grandezas, que compoem hum systema proposto; e eis-aqui o que propriamente se chama methodo dos limites.

Para explicarmos a sua marcha, e espirito, tornemos ao exemplo a cima tratado.

Explicaçaõ do methodo propriamente chamado dos limites.

Pelo que se disse (9), he evidente que, naõ obstante naõ ser $\frac{M\,Z}{R\,Z}$ igual á $\frac{T\,P}{M\,P}$, a primeira destas quantidades differe tanto menos da segunda quanto $R\,S$ mais se aproxima á $M\,P$, isto he, que $\frac{M\,Z}{R\,Z} = \frac{T\,P}{M\,P}$ he huma equaçaõ imperfeita; mas que (designando-se por $L.$ a expressaõ de limite ou de ultimo valor) $L.\ \frac{M\,Z}{R\,Z} = \frac{T\,P}{M\,P}$ he huma equaçaõ perfeita, ou rigorosamente exacta.

Do mesmo modo provar-se-ha que $L.\ \frac{M\,Z}{R\,Z} = \frac{y}{a-x}$ tam-

tambem he huma equaçaõ perfeita, ou rigorofamente exacta; logo igualando-fe eftes dous valores de $L. \frac{MZ}{RZ}$, teremos $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$, ou $TP = \frac{y^2}{a-x}$ como a cima. Por tanto nefte novo calculo naõ entraõ feparadamente as quantidades infinitamente pequenas MZ e RZ, nem a fua razaõ $\frac{MZ}{RZ}$, mas fómente o feu limite ou ultimo valor $L. \frac{MZ}{RZ}$, o qual he quantidade finita.

39. Poderia efte methodo parecer preferivel, fe a fua pratica foffe fempre taõ facil como a da analyfe infinitefimal; pois que teria a vantagem de conduzir aos mefmos refultados por hum caminho direito, e luminofo, em quanto a analyfe infinitefimal conduz á verdade depois de ter corrido, por affim dizer, o paiz dos erros.

A pratica defte methodo he mais difficultofa do que a da analyfe infinitefimal.

Mas devemos convir em que o methodo dos limites eftá fujeito a huma confideravel difficuldade, que naõ tem a analyfe infinitefimal ordinaria: confifte efta em que, naõ fe podendo feparar as quantidades infinitamente pequenas huma da outra, e achando-fe fempre ligadas duas a duas, naõ fe pódem fazer entrar em combinações as propriedades, que á cada huma dellas em particular pertencem, nem dar ás equações, que as contem, todas as transformações convenientes á fua eliminaçaõ: difficuldade, que menos fe conhece nas operações do calculo, do que nas propofições, e raciocinios, que á ellas nos conduzem.

[Pe-

Origem da denominaçaõ attribuida ás quantidades infinitamente pequenas.

40. Pelo que se disse (2) sobre a provavel origem da analyse infinitesimal, parece que as quantidades chamadas infinitamente pequenas recebêraõ este nome da persuasaõ, em que ao principio com effeito se estava, de ser necessario para a exactidaõ dos calculos, em que entravaõ, attribuir á estas arbitrarias valores, que realmente fossem menores, do que tudo o que póde ser objecto dos nossos sentidos, e da nossa imaginaçaõ; porém huma metaphysica mais reflectida tem feito conhecer, que isto he inutil, por quanto a exactidaõ do calculo provem, naõ da attenuaçaõ destas quantidades arbitrarias, mas taõ sómente da compensaçaõ dos erros por ellas occasionados no mesmo calculo.

Com effeito, havemos visto no exemplo a cima, que os processos, e resultados do calculo eraõ absolutamente os mesmos, qualquer que fosse o valor attribuido ás quantidades infinitamente pequenas *M Z*; *R Z*; e que por consequencia o caracter das quantidades desta especie naõ consiste na sua pequenhez real, mas sim na sua indeterminaçaõ absoluta, isto he, na propriedade que tem de ficarem arbitrarias durante todo o calculo, e de tal modo independentes das grandezas propostas, que sempre podem ser tomadas taõ pequenas, quanto se quizer, sem alteraçaõ das condições do problema.

As quantidades infinitesimaes naõ saõ por tanto, como já se disse (24), entes quimericos, mas simples variaveis caracterisadas pela natureza do seu limite, que he o, ou $\frac{1}{0}$. Póde-se por tanto successivamente attribuir á estas indeterminadas, bem como ás outras quantidades indefinitas, diversos valores arbitrarios; e entre el-

elles ſe deve contar o ultimo de todos que he o, quanto ás quantidades infinitamente pequenas, e $\frac{1}{o}$ quanto ás infinitas.

41. Eſta obſervaçaõ dá lugar a diſtinguir-ſe o infinito mathematico em duas eſpecies; a ſaber, infinito *ſenſivel* ou *aſſinavel*, e infinito *abſoluto* ou *metaphyſico*, o qual he o limite do primeiro.

Diſtincçaõ do infinito mathematico em infinito ſenſivel, e infinito abſoluto.

Por tanto aſſinando-ſe á qualquer quantidade infinitamente pequena hum valor determinado, que naõ ſeja o, eſte valor ſerá o que chamo quantidade infinitamente pequena, *ſenſivel*, ou *aſſinavel*, a qual tambem deſignarei pelo nome de *infinitamente pequeno*; pelo contrario, ſe eſte valor he o ultimo de todos, quero dizer, ſe he abſolutamente nullo, ſerá entaõ o que chamo infinitamente pequeno *abſoluto* ou *metaphyſico*, e que tambem deſignarei pelo nome de quantidade *deſvanecente.*

Aſſim huma quantidade deſvanecente naõ he a que em geral ſe chama quantidade infinitamente pequena, mas ſim o ſeu ultimo valor; he hum valor determinado, o qual como outro qualquer ſe póde attribuir á eſta grandeza arbitraria chamada em geral infinitamente pequena.

42. A conſideraçaõ deſtas quantidades deſvanecentes ſeria quaſi inutil, ſe nos limitaſſemos a tratallas no calculo como quantidades ſimplesmente nullas: porque entaõ ſómente offereceriaõ a razaõ vaga de o para o, a qual tanto he igual á 2, como á 3, como á outra qual-

quer quantidade; mas naõ se deve perder de vista, que estas quantidades nullas tem aqui propriedades particulares como ultimos valores das quantidades indefinitamente pequenas, das quaes saõ limites, e que se lhes dá o nome particular de desvanecentes para lembrança de que de todas as razões e relações, das quaes saõ susceptiveis em qualidade de quantidades nullas, sómente se querem considerar, e fazer entrar nas combinações do calculo aquellas, que lhes saõ assinadas pela lei de continuidade, quando se imagina o systema das quantidades auxiliares aproximando-se por gráos insensiveis ao systema das grandezas designadas; isto he o que grandes Geometras tem querido exprimir dizendo, que as desvanecentes eraõ quantidades consideradas, naõ antes, naõ depois, mas no mesmo instante do seu desvanecimento.

Por exemplo, no caso a cima exposto, em quanto RS naõ coincide com MP, a fracçaõ $\frac{MZ}{RZ}$ he maior do que $\frac{TP}{y}$; estas duas fracções só ficaõ iguaes no momento, em que MZ e RZ se reduzem á cifra: he verdade que entaõ $\frac{MZ}{RZ}$ he igual tanto á qualquer outra quantidade como á $\frac{TP}{y}$, pois que $\frac{0}{0}$ he huma quantidade absolutamente arbitraria; mas entre os diversos valores, que se pódem attribuir á $\frac{MZ}{RZ}$, he $\frac{TP}{y}$ o unico sujeito á lei de continuidade, e por ella determinado; porque construindo-se huma curva, cuja abscissa seja a quantidade indefinitamente pequena MZ, e a ordenada pro-

por-

porcional á $\frac{MZ}{RZ}$, a que correfponder á abfciffa nulla, ferá reprefentada por $\frac{TP}{y}$, e naõ por huma quantidade arbitraria: ora, nifto he que fe diftinguem as quantidades, que chamo defvanecentes, daquellas, que faõ fimplesmente nullas.

Affim, ainda que em geral fe tenha $o = 2 \times o = 3 \times o = 4 \times o =$ &c., naõ fe póde dizer de huma quantidade defvanecente, tal qual he MZ, que temos $MZ = 2\,MZ = 3\,MZ = 4\,MZ =$ &c.; porque a lei de continuidade naõ póde affinar entre MZ e MZ outra razaõ, que naõ feja a de igualdade, nem outra relaçaõ, que naõ feja a de identidade.

43. Havemos vifto, que introduzindo-fe no calculo quantidades infinitamente pequenas, e fendo eftas defprezadas em comparaçaõ das grandezas finitas, as equações ficaõ imperfeitas, e que os erros commettidos fómente faõ compenfados no refultado procurado. Póde-fe agora evitar, querendo-fe, efta efpecie de inconveniente por meio dos defvanecentes, os quaes, naõ fendo mais do que os ultimos valores das quantidades indefinitamente pequenas correfpondentes, podem, como todos os outros valores, fer attribuidos á eftas quantidades indefinitamente pequenas; e que, por outra parte, fendo abfolutamente nullos, podem fer defprezados, quando fe achaõ fomados ou diminuidos de algumas quantidades effectivas, fem que o calculo deixe de fer perfeitamente rigorofo.

44. Póde-ſe por tanto contemplar a analyſe infiniteſimal debaixo de dous pontos de viſta differentes; conſiderando-ſe as quantidades infinitamente pequenas ou como effectivas, ou como abſolutamente nullas. No primeiro caſo, a analyſe infiniteſimal he hum calculo de erros compenſados; e no ſegundo, he a arte de comparar quantidades deſvanecentes entre ſi, e com outras, para deſtas comparações ſe deduzirem as razões, e relações quaeſquer, que exiſtem entre as quantidades propoſtas.

Como iguaes á cifra devem eſtas quantidades deſvanecentes ſer deſprezadas no calculo, quando ſe achaõ fomadas, ou diminuidas de alguma quantidade effectiva; mas, como ſe acaba de ver, ellas tambem tem razões muito intereſſantes, e que ſaõ determinadas pela lei de continuidade, á qual eſtá ſugeito o ſyſtema das quantidades auxiliares na ſua mudança. Ora, para facilmente ſer conhecida eſta lei de continuidade, he facil de ver que devemos conſiderar as quantidades deſvanecentes em alguma diſtancia do termo, em que inteiramente ſe deſvanecem, pois do contrario ellas ſómente offereceriaõ a razaõ indefinita de $\frac{0}{0}$; mas eſta diſtancia he arbitraria, e tem por unico objecto o moſtrar mais facilmente as razões, que exiſtem entre as quantidades deſvanecentes: ſaõ eſtas razões as que ſe tem em viſta, contemplando-ſe as quantidades infinitamente pequenas como abſolutamente nullas, e naõ as que exiſtem entre as quantidades que ainda naõ tem chegado ao termo da ſua anichilaçaõ. As que havemos chamado indefinitamente pequenas, naõ ſaõ deſtinadas a entrar no calculo contemplado debaibaixo do ponto de viſta, de que agora ſe trata, ſenaõ para ajudar a imaginaçaõ, e indicar a lei de continuidade, que determina as razões e relações quaeſquer das quantidades deſvanecentes, ás quaes correſpondem.

Aſſim, depois deſta hypotheſe, na proporçaõ $MZ : RZ :: TP : MP$, as quantidades repreſentadas por MZ e RZ ſaõ ſuppoſtas abſolutamente iguaes á cifra; mas como da ſua razaõ he que temos neceſſidade, para ſe conhecer a ſua igualdade com $\frac{TP}{MP}$ he neceſſario conſiderar as quantidades indefinitamente pequenas, que correſpondem á eſtas quantidades nullas, naõ a fim de as introduzir no calculo, mas a fim de nelle fazer entrar debaixo da denominaçaõ de MZ e de RZ, as quantidades deſvanecentes, que ſaõ os ſeus ultimos valores.

45. Por tanto eſtas expreſſões MZ, RZ repreſentaõ aqui quantidades nullas, e dellas ſe uſa antes debaixo das fórmas MZ, RZ, do que debaixo da fórma commum o, porque ſendo com effeito empregadas debaixo deſta ultima fórma, nas operações, em que entraſſem, naõ poderiaõ ſer diſtinguidas as ſuas diverſas origens, iſto he, as diverſas quantidades indefinitamente pequenas, que lhes correſpondem. Ora, a conſideraçaõ, ao menos mental, deſtas quantidades he neceſſaria para ſe deſcobrir a lei de continuidade, que determina a razaõ procurada das quantidades deſvanecentes, que ſaõ os ſeus limites, e por conſequencia he eſſencial o naõ perdellas de viſta, e o caracteriſallas por expreſſões, que evitem a ſua confuſaõ.

As

46. As quantidades desvanecentes, que formaõ o objecto do calculo infinitesimal contemplado debaixo deste novo ponto de vista, saõ na verdade entes de razaõ: mas isto naõ embaraça a que tenhaõ propriedades mathematicas, e que possaõ ser comparadas assim como se comparaõ as quantidades imaginarias, cuja existencia naõ he mais segura; porque tanto se póde affirmar ser, por exemplo, $60 = 20 + 40$, como $\sqrt{-a} = \sqrt{-b} \times \sqrt{\frac{a}{b}}$. Ora, ninguem duvida da exactidaõ dos resultados obtidos do calculo dos imaginarios, naõ obstante serem fórmas algebricas, e jeroglificos de quantidades absurdas; com mais razaõ devem ser admittidas as quantidades desvanecentes, as quaes ao menos saõ os limites de grandezas effectivas, e tocaõ, por assim dizer, a existencia. Que importa com effeito que estas quantidades sejaõ ou naõ entes quimericos, se o naõ forem as suas razões, unica cousa, que nos interessa? Logo, quando usamos no calculo das quantidades infinitesimaes, podemos considerallas como quantidades effectivas, ou como absolutamente nullas; e a differença, que ha nestes dous modos de tratar a questaõ, consiste em que, contemplando-se estas quantidades como nullas, as proposições, equações, e resultados quaesquer, saõ sempre exactos, e rigorosos; mas referem-se á quantidades, que saõ entes de razaõ, e exprimem relações, que existem entre quantidades, que naõ tem existencia: em lugar de que, contemplando-se as quantidades infinitamente pequenas como alguma cousa effectiva, as proposições, equações, e resultados quaesquer tem por objecto verdadeiras quantidades; mas estas proposições, equações, e resultados saõ falsos, ou antes

saõ

ſaõ imperfeitos, e ſómente ſe tornaõ exactos no fim por compenſaçaõ dos ſeus erros, compenſaçaõ com tudo, que he huma conſequencia neceſſaria, e infallivel das operações do calculo.

47. A metaphyſica, que acaba de ſer expoſta, ſubminiſtra facilmente reſpoſtas á todas as objecções, que muitos Geometras tem feito contra a analyſe infiniteſimal, julgando o ſeu principio falſo, e capaz de induzir á erro; mas a multidaõ de prodigios, e explendor das verdades, que em tropel brotáraõ deſte principio, os tem, por aſſim dizer, ſuffocado.

Eſtas objecções podem ſer reduzidas á ſeguinte: Sendo riſivel a ſuppoſiçaõ da exiſtencia de entes, que tem o meio entre a grandeza e a cifra, as quantidades chamadas infinitamente pequenas ou ſaõ abſolutamente nullas, ou tem grandeza effectiva. Ora, no primeiro caſo, nada moſtra a ſua comparaçaõ, pois que a razaõ de o para o tanto he expreſſa por *a* como por *b*, como por outra qualquer quantidade; e no ſegundo caſo, ſem erro naõ podem ſer tratadas como nullas, conforme as regras da analyſe infiniteſimal.

He ſimples a reſpoſta: bem longe de ſe naõ poderem com effeito conſiderar as quantidades infinitamente pequenas como alguma couſa real, ou como nada, affirma-ſe pelo contrario que podemos á vontade contemplallas como nullas, ou como verdadeiras quantidades; por quanto, os que as quizerem conſiderar como nullas, podem reſponder, que chamaõ quantidades infinitamente pequenas naõ a aquellas, que ſaõ quantidades nullas quaeſquer, mas as que ſaõ quantidades nullas aſſinadas

por

por huma lei de continuidade, que determina a sua relaçaõ; que entre todas as razões, de que saõ susceptiveis como cifra, só consideraõ as que saõ determinadas por esta lei de continuidade; e que em fim naõ saõ vagas e arbitrarias estas razões, por quanto a lei de continuidade naõ assina, por exemplo, muitas razões diversas ás differenciaes da abscissa, e da ordenada de huma curva, quando ellas se desvanecem, mas sómente huma, que he a da subtangente para a ordenada. Aquelles porém que contemplaõ as quantidades infinitamente pequenas como verdadeiras quantidades, podem responder, que chamaõ infinitamente pequena a huma grandeza arbitraria, e independente das quantidades propostas: que por consequencia, sem a supporem nulla, a podem com tudo como tal tratar, sem erro algum do resultado, pois que se o houvesse, seria arbitrario bem como a quantidade que o produzio. Ora, he evidente, que hum semelhante erro só póde existir entre quantidades, das quaes ao menos alguma seja arbitraria. Logo quando se tem chegado a hum resultado, que as naõ contem, e que exprime qualquer relaçaõ entre as quantidades dadas, e as que saõ determinadas pelas condições do problema, póde-se affirmar, que este resultado he exacto, e que por consequencia os erros commettidos na expressaõ das condições, poderáõ ser compensados, e desaparecêraõ por huma consequencia necessaria e infallivel das operações do calculo.

48. Outros Geometras apparentemente embaraçados com esta objecçaõ, se occupáraõ simplesmente em provar que o methodo dos limites, cujos processos saõ ri-

go-

gorofamente exactos conduz neceffariamente aos mefmos refultados da analyfe infinitefimal. Mas convindo em fer muito luminofo o principio defte methodo, naõ podemos diffimular, que por hum tal modo fe illude, mas naõ fe refolve a difficuldade; que o methodo dos limites conduz aos refultados da analyfe infinitefimal por hum caminho indirecto, e difficil; e que finalmente, longe de fer o mefmo, que o do calculo do infinito, he pelo contrario a arte de o evitar, e de o fuprir com o calculo algebrico ordinario, o que fe confeguiria de hum modo mais fimples, fegundo julgo, pelo methodo das indeterminadas. Mas porque motivo fe admittirá hum com exclufaõ dos outros, podendo eftes methodos ajudarem-fe mutuamente? Ufemos por tanto, já da analyfe infinitefimal, já do methodo dos limites, já do das indeterminadas, conforme o indicarem as circunftancias; e naõ defprezemos algum dos meios, que nos podem conduzir ao conhecimento da verdade, ou a fimplificar a fua indagaçaõ.

Refta-me o moftrar por alguns exemplos a applicaçaõ dos principios geraes, que tenho explicado; o que paffo a fazer, dando huma idéa dos calculos differencial, e integral, os quaes, propriamente fallando, faõ a mefma analyfe infinitefimal reduzida á pratica.

Principios dos calculos differencial e integral.

49. Attribuindo-fe fucceffivamente á huma mefma quantidade variavel dous valores infinitamente pouco differentes hum do outro, a differença entre elles chamar-fe-ha *differencial* do primeiro valor.

Seja, por exemplo, *A M N* (Fig. 2.) huma curva; relativamente á qual temos que refolver huma queftaõ tal, que a ordenada $M P$ ſeja huma das quantidades por ella deſignadas. Supponho de mais que para facilidade da ſoluçaõ ſe tira parallelamente á $M P$ em diſtancia arbitraria huma linha auxiliar $N Q$, e que depois eſta ſe aviſinha continuamente á $M P$ até com ella coincidir; a linha $N O$, ou $N Q - M P$ ſerá por tanto (19) huma quantidade infinitamente pequena. Ora como ella he a differença dos dous valores $N Q$, $M P$ attribuidos ſucceſſivamente á ordenada, ſe tem convencionado em a deſignarmos pela expreſſaõ diminutiva de differencial da variavel $M P$, ſendo repreſentada no calculo por eſta meſma variavel precedida da caracteriſtica d: aſſim, exprimindo y a ordenada $M P$, $d y$ exprimirá a differencial de $M P$.

Mas ſuppor-ſe, como ſe ha feito, que $N Q$ ſe aproxima continuamente á $M P$, he ſuppor-ſe que $A Q$ ſe aproxima tambem continuamente á $A P$; pois que a primeira deſtas ſuppoſições comprehende neceſſariamente a ſegunda: logo, chamando-ſe x a abſciſſa $A P$, ſerá $P Q$ ou $M O$ a differencial de x, e ter-ſe-ha $M O = d x$ ao meſmo tempo que $N O = d y$.

Suppondo-ſe mais $N Q = y'$ e $A Q = x'$, ter-ſe-ha $y' = y + d y$ e $x' = x + d x$; o que indica, que as differenciaes $d y$ e $d x$ ſaõ os augmentos das variaveis correſpondentes y e x, ou as quantidades, com que ſaõ augmentadas, para ſe tornarem em y' e x'.

50. Attribua-ſe agora á ordenada hum novo valor $R S$, tal que $P Q$ e $Q S$ diffiraõ infinitamente pouco entre ſi, ou tenhaõ por ultima razaõ huma razaõ de igualdade; para iſto, como $N Q$ pela primeira hypotheſe já

he

he ſuppoſto aproximar-ſe continuamente á $M P$, he evidentemente neceſſario, que $R S$ ſe aproxime tambem continuamente á meſma linha $M P$, de maneira que por ultimo, aſſim como $N Q$, coincida com ella: do contrario he claro, que a razaõ de $Q S$ para $P Q$, ſe deſviará da unidade, quando por hypótheſe deve aproximar-ſe á eſta continuamente: aſſim as razões de $N Q$ para $M P$, de $R S$ para $M P$, de $R S$ para $N Q$, e de $Q S$ para $P Q$, teraõ todas por limite a razaõ de igualdade. Tambem he evidente, que, por cauſa da lei de continuidade, a razaõ de $R Z$ para $N O$ eſtará no meſmo caſo. Logo, conforme a noçaõ geral, que a cima ſe deo das quantidades differenciaes, deve ſer $Q S$ a differencial de $A Q$, $R Z$ a de $N Q$, $Q S - P Q$ ou $N Z - M O$ a de $P Q$, e finalmente $R Z - N O$ a de $N O$; do meſmo modo que $N O$ ou $N Q - M P$ he a de $M P$. Logo, conforme a convençaõ feita a reſpeito do modo de exprimir no calculo às differenciaes, devemos ter $Q S = d x'$, $R Z = d y'$, $Q S - P Q = d(MO)$, $R Z - N O = d(NO)$. Mas já ſe achou $M O = d x$, $N O = d y$: logo $Q S - N Q = d d x$, $R Z - N O = d d y$; o que exprime, que as quantidades $d d x$, $d d y$, (as quaes tambem ſe eſcrevem deſte modo $d^2 x$, $d^2 y$) ſaõ as differenciaes das differenciaes de x e y, que por brevidade ſe chamaõ *differenças ſegundas* ou *differenciaes da ſegunda ordem*; ſendo $d d x$ a differencial da ſegunda ordem, ou a differencial ſegunda de x, e $d d y$ a de y.

Ora, como $Q S$ e $P Q$ ſaõ ſuppoſtas infinitamente pouco differentes entre ſi, a ſua differença $d d x$ he infinitamente pequena relativamente á cada huma dellas (28). Logo as differenças da ſegunda ordem ſaõ infinitamente pequenas relativamente ás differenciaes primeiras, ou da primeira ordem (*).

51. Do mesmo modo se podem differenciar as differenciaes da segunda ordem, e desta differenciaçaõ resultaraõ as da terceira ordem: da differenciaçaõ destas resultaraõ as da quarta ordem, e assim por diante: de modo que $dddy$ ou d^3y será a differença terceira de y; $ddddy$ ou d^4y a differença quarta de y, &c. Ora, do que se ha dito a respeito da formaçaõ das differenciaes da primeira, e da segunda ordem, he facil de deduzir-se como nos haveremos a respeito das de ordens superiores; e por isso naõ me demorarei mais, e sómente direi, que isto se consegue, attribuindo-se, em cada nova ordem, hum novo valor auxiliar á cada huma das variaveis, tal que, naõ sómente cada hum dos novos valores diffira infinitamente pouco, do que lhe precede, mas o mesmo aconteça entre as suas differenciaes, as differenciaes das suas differenciaes, e assim por diante.

Dif-

(*) Se em lugar de tirar-se a nova linha auxiliar RS de modo que QS e PQ diffiraõ infinitamente pouco entre si, se tira de maneira que seja QS precisamente igual á PQ, isto he, tal que AP, AQ, AS estejaõ em progressaõ arithmetica, ter-se-ha $ddx = 0$, ou dx constante: assim póde-se suppor constante huma das differenciaes; mas de estarem AP, AQ, AS em progressaõ arithmetica naõ se segue, que tambem o estejaõ MP, NQ, RS, excepto sendo recta a linha AMN; por tanto de se suppor $ddx = 0$, naõ se deduzirá, que tambem he $ddy = 0$.

52. *Differenciar* huma quantidade, he affinar a fua differencial; ifto he, fendo X huma funçaõ qualquer de x, para differenciar-fe X he precifo affinar-fe a quantidade, que augmentará efta funçaõ, fuppondo-fe que dx he o augmento de x.

Integrar ou fomar huma differencial, ao contrario, he tornar defta differencial á quantidade, que a produzio pela fua differenciaçaõ, e efta ultima quantidade fe chama *integral* ou *foma* da differencial propofta; affim, por exemplo, he x a integral, ou a foma de dx, e integrar ou fomar dx naõ he mais do que affinar a quantidade x, que he a fua foma ou integral.

Havemos vifto, que a differencial de huma quantidade fe exprime no calculo pela mefma quantidade precedida da caracteriftica d; reciprocamente, fe tem convencionado de exprimir-fe a integral ou foma de huma qualquer differencial pela mefma differencial precedida da caracteriftica $\int$; ifto he, que $\int dx$, por exemplo, fignifica a mefma coufa que foma de dx: por tanto ferá $x = \int dx$.

53. Chama-fe *calculo differencial*, e *integral* a arte de fe acharem as razões, e relações quaefquer, que exiftem entre as quantidades propoftas, por meio das fuas differenciaes. O nome de *calculo differencial* fe dá propriamente á arte de indagar as razões, ou relações das quantidades differenciaes, e de as eliminar depois pelas regras ordinarias da algebra; e o de *calculo integral* exprime a arte de integrar ou de eliminar eftas mefmas quantidades differenciaes por proceffos, que enfinaõ a tornar de huma differencial ao feu integral.

Naõ

Naõ pertendo escrever agora hum tratado destes calculos; mas sómente indicar as suas regras fundamentaes, e mostrar que ellas saõ huma applicaçaõ dos principios geraes, que havemos exposto.

54. Proponhamo-nos por tanto a assinar primeiramente a differencial da soma $x + y + z +$ &c., de muitas variaveis.

Por hypothese x se torna em $x + dx$, y em $y + dy$, &c. Logo a soma proposta se torna em $x + dx + y + dy + z + dz +$ &c.; por tanto o seu augmento $dx + dy + dz +$ &c., he precisamente o que havemos chamado differencial.

55. Busque-se agora a differencial de $a + b + c +$ &c. $+ x + y + z +$ &c.: sendo a, b, c, &c. constantes, e x, y, z, &c. variaveis.

Por hypothese, a, b, c, &c. naõ mudaõ de valor; e x se torna em $x + dx$, y em $y + dy$, &c. Logo a soma proposta se tornará em $a + b + c +$ &c. $+ x + dx +$ &c.; e por tanto o seu augmento $dx + dy + dz +$ &c., será a differencial procurada; logo he a mesma que se acharia, naõ havendo constantes na soma proposta.

Pede-se a differencial de ax.

Por hypothese a naõ muda, e x se torna em $x + dx$. Logo ax se tornará em $ax + adx$; e o seu augmento adx será por tanto a differencial procurada.

56. Pede-se a differencial de xy.

Do

Do precedente ſe deduz, que ella ſerá $y\,dx + x\,dy + dx\,dy$, iſto he, que teremos $d(xy) = y\,dx + x\,dy + dx\,dy$.

Mas, á reſpeito deſta equaçaõ, obſervo que ſendo dx e dy infinitamente pequenos relativamente á x e y, o ultimo termo $dx\,dy$ he tambem infinitamente pequeno relativamente á cada hum dos outros, quero dizer, que o quociente deſte ultimo termo dividido por cada hum dos outros he huma quantidade infinitamente pequena. Logo, ſendo deſprezado na equaçaõ precedente, ter-ſe-ha $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, equaçaõ imperfeita na minha fraſe. Mas como as equações imperfeitas podem (31, 34) ſer empregadas como rigoroſas, ſem erro do reſultado procurado, he evidente, que poſſo uſar deſta ultima equaçaõ em lugar da primeira; e como he mais ſimples, com o ſeu ſoccorro ſe facilitaraõ, e abreviaraõ as operações do calculo.

Por tanto direi que a differencial de huma quantidade, a qual he o producto de duas variaveis, he igual ao producto da primeira variavel pela differencial da ſegunda, mais o producto da ſegunda variavel pela differencial da primeira; e eſta propoſiçaõ ſerá daquellas que chamei (35) imperfeitas, iſto he, ſuſceptiveis de ſerem expreſſas por huma equaçaõ imperfeita, e que como eſta conduzem a reſultados rigoroſamente exactos (*).

Por

(*) Com facilidade ſe tornará rigoroſa a equaçaõ imperfeita $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, reſtituindo-ſe ao ſegundo membro o termo $dx\,dy$, que lhe falta; o meſmo tambem poderei obter do modo ſeguinte: dividindo tu-

57. Por ſemelhantes proceſſos deduzir-ſe-ha a equaçaõ imperfeita $d(xyz) = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$. Achar-ſe-haõ do meſmo modo as equações imperfeitas $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, $d(x^m) = m\,x^{m-1}\,dx$, &c.

58. Taes ſaõ as principaes regras do calculo differencial : paſſemos agora ás do calculo integral, o qual he o methodo inverſo.

1.° Como dx he a differencial de x, ſerá x a integral de dx, e teremos $\int dx = x$. Mas ſendo (55) tambem dx a differencial de $a + x$, ſegue ſe que a integral de dx tanto he x, como $a + x$; e que, em ge-

ral,

---

do por dy, por exemplo, terei a nova equaçaõ imperfeita $\frac{d(xy)}{dy} = y\,\frac{dx}{dy} + x$; e como (19) huma quantidade auxiliar differe infinitamente pouco do ſeu limite, poſſo, na equaçaõ precedente, ſubſtituir lim. $\left(\frac{d(xy)}{dy}\right)$ em lugar de $\frac{d(xy)}{dy}$, e lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ em lugar de $\frac{dx}{dy}$, ſem que a equaçaõ deixe de ſer imperfeita (32). Ora ter-ſe-ha entaõ lim. $\left(\frac{d(xy)}{dy}\right) = y \times$ lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right) + x$; mas todo o limite pela meſma diffiniçaõ he huma quantidade deſignada (17). Logo, ainda que dx e dy ſejaõ auxiliares, lim. $\left(\frac{d(xy)}{dy}\right)$ e lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ ſaõ quantidades deſignadas ; ſaõ por tanto quantidades deſignadas todos os termos da equaçaõ precedente ; e por conſequencia (34) eſta equaçaõ he exacta neceſſaria, e rigoroſamente.

ral, cada differencial póde ter muitos integraes, mas sómente diversos quanto ás quantidades constantes. Basta por tanto determinar hum delles, e ajuntar-lhe huma constante arbitraria para representar todas as outras: assim, todos os integraes possiveis de dx seraõ representados por $x + A$, sendo A huma constante arbitraria.

2.° Como a differencial de $x + y + z +$ &c. he $dx + dy + dz +$ &c., o integral desta differencial será $x + y + z +$ &c. $+ A$, sendo A huma constante arbitraria.

3.° Sendo $x\,dy + y\,dx$ (56) a differencial de xy, ou de $xy + A$, será $xy + A$ o integral de $x\,dy + y\,dx$, sendo A huma constante arbitraria.

4.° Do mesmo modo se deduzirá que $\frac{x}{y} + A$ he o integral de $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$.

5.° Semelhantemente achar-se-ha, que o integral de $m x^{m-1}\,dx$ he $x^m + A$, &c.

Estas saõ as principaes regras do calculo integral: resta-nos o mostrar em alguns exemplos particulares a sua applicaçaõ, e a das do calculo differencial: o que passamos a fazer o mais succintamente, que nos for possivel.

PROBLEMA I.

Applicação dos principios geraes a alguns exemplos.

59. D*Ada huma curva elliptica* AMB (Fig. 3.) *achar a ſubtangente* TP, *que correſponde á hum ponto dado qualquer* M.

Seja AB o grande eixo da curva; repreſentando a a metade do grande eixo, b a metade do pequeno eixo, x a abſciſſa AP, e y a ordenada PM; teremos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Iſto poſto, tire-ſe huma nova ordenada NQ infinitamente proxima á MP, iſto he, que eſta linha auxiliar NQ ſeja primeiramente tirada á huma diſtancia qualquer arbitraria de MP, e que depois ſeja ſuppoſta aproximar-ſe continuamente, de ſorte que a ſua ultima razaõ ſeja huma razaõ de igualdade; ſeraõ por tanto as linhas MO, NO as differenciaes (49) reſpectivas á x e y. Ora os triangulos ſemelhantes TPM, MZO daõ $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{ZO} = \frac{MO}{NO + ZN}$. Mas he evidente que quanto mais NQ ſe aproxima á MP, tanto mais ZN diminue relativamente á NO, e que a ſua ultima razaõ he o. Logo ZN he infinitamente pequeno relativamente á NO; por tanto $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$, ou $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$ he huma equaçaõ imperfeita (31).

Pela differenciaçaõ da equaçaõ da curva $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ teremos $ydy = \frac{b^2}{a^2}(adx - xdx)$, equaçaõ tambem imperfeita; ſubſtituindo-ſe por tanto neſta o valor de de dx tirado da primeira, e feitas as reducções, teremos $TP = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}$, equaçaõ, que naõ contendo quantidades infinitesimaes, he (34) exacta necessaria, e rigorosamente.

60. *Outra soluçaõ.* Considere-se a curva proposta como polygono de hum numero infinito de lados; isto he, tome-se em lugar da curva hum polygono de qualquer numero de lados, e depois supponha-se que este numero augmenta cada vez mais, de maneira que a ultima relaçaõ deste polygono com a curva seja huma relaçaõ de identidade. Como he absolutamete impossivel, que a curva possa ser considerada exactamente como hum polygono, naõ seraõ exactas as equações, que exprimirem as condições do problema, havendo-se partido desta hypothese; mas como se suppoem que o polygono se aproxima continuamente á curva, os erros que se acharem nestas equações seraõ feitos taõ pequenos, quanto se quizer, e por tanto seraõ estas equações da natureza das que chamei imperfeitas.

Assim os triangulos $T'MP$, MNO daõ $\frac{T'P}{MP} = \frac{MO}{NO}$: e substituindo-se TP em lugar de $T'P$ de quem differe infinitamente pouco, ter-se-ha a equaçaõ imperfeita $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$ ou $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$, como a cima, e combinando-se esta com a equaçaõ da curva, teremos o mesmo resultado.

61. Póde-ſe tambem, querendo-ſe, applicar á eſta queſtaõ o methodo das indeterminadas ſem mudança do proceſſo do calculo. Com effeito, depois de achadas as duas equações imperfeitas $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$ e $2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2adx - 2xdx)$, para as tornar exactas, ajunto mentalmente a hum dos ſeus membros a quantidade φ quanto á primeira, e φ' quanto á ſegunda: eſtas quantidades φ e φ' ſaõ por tanto infinitamente pequenas relativamente áquellas á que mentalmente ſe ajuntaõ. Iſto poſto, comparando-ſe as duas equações precedentes, ſem attençaõ ás quantidades φ e φ', a equaçaõ reſultante $TP = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a-x}$, podendo naõ ſer exacta, ajunto-lhe ainda mentalmente huma quantidade φ'' tal que a torne exacta. Mas como φ'' ſó póde ſer infinitamente pequeno, reconheço facilmente, que he abſolutamente nullo, pois que os outros termos da equaçaõ naõ contem quantidades infiniteſimaes; com effeito paſſando-ſe todos os termos para hum ſó membro, ter-ſe-ha a equaçaõ $\left(TP - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a-x}\right) + \varphi'' = 0$, a qual, ſegundo o methodo das indeterminadas, naõ póde ter lugar, ſem que ſeja cada hum dos ſeus termos em particular igual a cifra: logo $\varphi'' = 0$, e $TP = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a-x}$, como a cima.

62. Em geral, he evidente, pelo que ſe tem dito, que ſendo P a ſubtangente de huma curva qualquer,

ter-

ter-ſe ha a equaçaõ imperfeita $P = y\,\frac{dx}{dy}$: logo (34) teremos a equaçaõ rigoroſamente exacta $P = y \times \lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$.

Repreſentando Q o angulo comprehendido entre a tangente á curva em hum ponto qualquer, e a ordenada correſpondente, ter-ſe-ha evidentemente tang. $Q = \frac{P}{y}$, e cot. $Q = \frac{y}{P}$: logo teremos as equações imperfeitas, tang. $Q = \frac{dx}{dy}$, e cot. $Q = \frac{dy}{dx}$, ou as equações rigoroſas, tang. $Q = \lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$, e cot. $Q = \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

PROBLEMA II.

63. PEde-ſe *o valor que deve ter x para que a funçaõ $\sqrt{(2ax - x^2)}$ ſeja hum maximo*, iſto he, *para que tenha hum valor maior do que teria, ſe o valor de x foſſe outro qualquer.*

Suppondo-ſe $\sqrt{(2ax - x^2)} = y$, ou $y^2 = 2ax - x^2$, e conſtruindo-ſe huma curva, cuja abſciſſa ſeja x, e y a ordenada correſpondente, ficará a queſtaõ reduzida, á achar-ſe a maior ordenada deſta curva. Repreſente AMB (Fig. 4.) a curva, e MP a maior ordenada. Como, contando-ſe do ponto M as outras ordenadas diminuem tanto do lado de B, como do de A, he evidente que a tangente ao ponto M da curva deve ſer parallela á

AB.

AB. Por tanto exprimindo-se, como a cima, por Q o angulo formado pela tangente, e pela ordenada; ter-se-ha no ponto M, cot. $Q = o$, ou (62) lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$. Differenciando-se a equaçaõ da curva, teremos a equaçaõ imperfeita $y\,dy = a\,dx - x\,dx$, ou $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$; da qual se deduz a equaçaõ rigorosa lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a-x}{y}$, ou cot. $Q = \frac{a-x}{y}$. Mas he cot. $Q = o$, logo teremos $\frac{a-x}{y} = o$, ou $a = x$ O Q. S. P.

64. Para achar-se por tanto a maxima ordenada de huma qualquer curva, dever-se-ha differenciar a equaçaõ, tirar o valor de lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e igualallo a cifra. Esta regra se enuncia ordinariamente, dizendo-se simplesmente, que se deve differenciar y, e igualar dy a cifra; mas o laconismo deste enunciado tem o defeito de ser menos exacto, do que o precedente.

PRO-

PROBLEMA III.

65. *Determinar a abſciſſa, ou a ordenada, que correſponde á hum ponto de inflexaõ de huma dada curva.*

Seja $ABMN$ (Fig. 5.) a curva propoſta, cuja abſciſſa AP, e a ordenada MP correſpondaõ ao ponto de inflexaõ M, que ſe quer determinar; tire-ſe a tangente MK á eſte ponto de inflexaõ; he evidente que o angulo KMP he hum *minimo*, iſto he, menor do que o angulo formado por outra tangente qualquer NL, e a ordenada correſpondente NQ; logo a tangente do angulo KMP he tambem hum *minimo*, e a ſua cotangente hum *maximo*; mas eſta cotangente he em geral (62) lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; logo devemos ter (63) lim. $\left(\frac{d.\ \text{lim.}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right) = 0.$

O Q. S. P.

Seja, por exemplo, $b^2 y = ax^2 - x^3$ a equaçaõ da curva propoſta; pela differenciaçaõ teremos $b^2 dy = 2ax\,dx - 3x^2\,dx$ equaçaõ imperfeita, ou lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2ax - 3x^2}{b^2}$ equaçaõ rigoroſa; logo deve ſer $\frac{2ax - 3x^2}{b^2}$ hum *maximo*, ou lim. $\left(\frac{d(2ax - 3 2^2)}{dx}\right) = 0$; iſto he, deve-ſe ter $2a = 6x = 0$, ou $x = \frac{1}{3}a$

PRO-

PROBLEMA IV.

66. *Achar a superficie de hum segmento parabolico.*

Seja AMP este segmento (Fig. 6.); suppondo-se que a abscissa AP tem hum augmento infinitamente pequeno PQ, o augmento deste segmento será ao mesmo tempo a quantidade $MNPQ$; isto he, suppondo-se que PQ he a differencial de x, será $MNPQ$ a differencial do segmento procurado. Logo reciprocamente o segmento procurado será o integral de $MNPQ$, ou será $AMP = \int(MNPQ)$; mas abaixando-se MO perpendicularmente á NQ, he evidente que a ultima razaõ do espaço MNO para o espaço $MOPQ$ he o: logo o primeiro destes espaços he infinitamente pequeno a respeito do segundo; por tanto teremos a equaçaõ imperfeita $MNPQ = MOPQ$. Substituindo-se a segunda destas quantidades em lugar da primeira na equaçaõ exacta $AMP = \int(MNPQ)$, ter-se-ha a equaçaõ imperfeita $AMP = \int(MOPQ)$, ou $AMP = \int y\,dx$; mas a equaçaõ da curva, sendo P o seu parametro, he $y^2 = Px$, donde se deduz $dx = \frac{2y\,dy}{P}$ equaçaõ imperfeita; logo substituindo-se em lugar de dx na primeira destas equações imperfeitas, o seu valor tirado da segunda, ter-se-ha a nova equaçaõ imperfeita $AMP = \int\frac{2y^2\,dy}{P}$. Mas (58) he $\int\frac{2y^2\,dy}{P} = \frac{\frac{2}{3}y^3}{P}$; logo $AMP = \frac{\frac{2}{3}y^3}{P}$, equaçaõ que, só contendo quantidades designadas, he rigorosamente exacta. *C. S. Q. A.*

67. O meſmo methodo ſe applica evidentemente á quadratura de outra qualquer curva, e por meio de analogos raciocinios póde ſervir para a ſua rectificaçaõ, e para a indagaçaõ de quaeſquer ſolidos.

68. Baſta eſte limitado numero de exemplos para ſe comprehender, qual ſeja o eſpirito da analyſe infiniteſimal. Em vaõ os ſeus adverſarios diraõ, que ſe arruina a certeza das mathematicas com a introducçaõ dos erros, que tem lugar, quando ſe uſa das equações imperfeitas; podem taes erros ter conſequencias perigoſas, havendo meios infalliveis de os fazer deſaparecer, e ſinaes certos para ſe conhecer quando tem deſaparecido? Deveremos renunciar as vantagens immenſas, que nos provem deſte calculo, por cauſa do receio de nos ſepararmos por hum inſtante dos proceſſos rigoroſos da geometria elementar, ou devemos preferir á vareda ſimples, e facil, pela qual eſta analyſe nos conduz ás decubertas, hum caminho eſpinhoſo, onde taõ facilmente nos podemos ver embaraçados? Tal he o que offerece o methodo dos limites, quando ſe pertende empregallo excluſivamente. Com effeito, os que querem proſcrever a noçaõ das quantidades infiniteſimaes ſaõ obrigados ou a recorrerem á algebra commum, o que apreſenta difficuldades immenſas, ou a ſervirem-ſe continuamente dos nomes de infinito, e de infinitamente pequeno, ao meſmo tempo que os deſacreditaõ, ſe aſſim o podemos dizer, e que trataõ de quimera a exiſtencia das meſmas couſas, das quaes ſaõ os jeroglificos. Dizem, que ſómente uſaõ deſtes termos figuradamente; mas pergunto: ſe huma linguagem figurada, e inintelligivel he a que con- *Concluſaõ.*

H vem

vem á ſimplicidade das mathematicas, e ſobre tudo á eſte rigor, que lhes ſerve de pretexto para condenarem a theorica do infinito. Naõ ſe reduzem a huma meſma couſa eſtes dous methodos, ou naõ ſaõ elles hum meſmo methodo diverſamente empregado? Em huma palavra naõ temos ſempre que dar as meſmas idéas, e exprimir as meſmas relações? Porque razaõ naõ as havemos de dar, e exprimir do modo o mais claro, e o mais ſimples?

FIM.

TABOA

DAS

MATERIAS QUE SE CONTEM NESTAS REFLEXÕES

Pag.	Linh.	Erros	Emendas
7	12	$(2y + NO)$	$y\,(2y + NO)$
53	penult.	$-\,3z^2$	$-\,3x^2$
	ult.	$=6x$	$-\,6x$