577302

C.C.

Lwc. III, p. 81 (1815?)

577302

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

POR

FRANCISCO VILLELA BARBOSA;
Cavalleiro da Ordem de Christo, Lente de Mathematica na Academia Real da Marinha; e Socio da Academia Real das Sciencias, &c.

Luis Pereira Caldas

1820

LISBOA,
NA OFFIC. DA ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS.
ANNO M. DCCC. XVI.
Com licença de S. ALTEZA REAL.

ARTIGO

EXTRAHIDO DAS ACTAS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS,

DA SESSÃO DE 12 DE JANEIRO DE 1815.

DEtermina a Academia Real das Sciencias, que os Elementos de Geometria *compostos pelo seu Socio Francisco Villela Barbosa, os quaes forão julgados dignos da luz publica, se imprimão á custa da Academia, e debaixo do seu privilegio.*

José Bonifacio de Andrada e Silva,

Secretario da Academia.

PREFAÇÃO.

ENtre os muitos Elementos de Geometria, que se tem escripto, e publicado depois de Euclides, forão adoptados nas Scholas Portuguezas, principalmente nas Militares, os de Mr. Bezout; talvez, porque este Geometra escreveo hum curso completo de Mathematicas para uso dos Alumnos de Marinha, e de Artilharia: e a pezar das muitas faltas, e inadvertencias, que se tem reconhecido nos escriptos elementares deste homem, aliàs de merecida reputação, he ainda inteiramente seguido o seu curso de Mathematicas. Mas que difficuldades não encontrão os Discipulos, que embaraços os Mestres, no estudo, e na explicação dos compendios deste Author? He por isso que alguns Professores, assim das nossas Scholas, como das Scholas de França, tem actualmente publicado supplementos, e notas a Bezout, e até mesmo reformado inteiramente alguns dos seus compendios. Entre tanto he sem dúvida o de Geometria aquelle, que exige mais, que todos, hu-

huma rigorosa reforma, ou antes inteira mudança; pois confesso que não posso, jámais, accommodar-me a que os Discipulos hajão, como evidentes, proposições, que carecem de demonstração, nem como demonstração, paralogismos, e fallacias. Supprir, na Aula, o Mestre com outras demonstrações, nem sempre he possivel, ou facil; e quando o he, a experiencia nos tem mostrado, que he baldar tempo; porque, de ordinario, nem todos promptamente as concebem, nem facilmente as retem a memoria. Nestes termos, entendi, por melhor, de ordenar hum novo compendio, que, acostado ao de Bezout, podesse servir aos mesmos fins. Todos sabem, quanto he difficil escrever bons compendios: e ao entender de Mr. d' Alembert; Descartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, &c., não terião feito pouco em produzir dignamente o de Geometria. (*a*) Protesto porém que não me poupei a disvello, e a trabalho algum, para que as cousas fossem escriptas com methodo, e clareza: e quiz an-

(*a*) *Pour faire d'excellens élemens de Géometrie, Descartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, &c. n'eussent pas eté de trop.*

Alembert.

antes ser algumas vezes miudo, que vago nos enunciados dos Theoremas, e ligeiro nas demonstrações; lembrando-me sempre, como diz o celebre Professor Mr. de Felice, (*a*) que o primeiro, e sem duvida o maior de todos os fructos, que nos devemos propor tirar do estudo desta Sciencia, he o de crear, e formar na Mocidade o spirito da Exactidão; fallo do spirito Geometrico, o unico, que, segundo a expressão de outro Sabio, *he a verdadeira fonte do discorrer, do inventar, e do saber*: a pezar de encontrar isto a opinião de muitos, que, tendo só por util das Mathematicas, o que póde ter immediata applicação aos usos mechanicos da vida, julgão para isso mais que sufficientes os enunciados das Proposições: mal este, de que já se queixava o nosso Geometra Portuguez, o Padre Manoel de Campos, contra

(*a*) *Mais le principal avantage de Mathematiques, c'est la justesse de l'esprit, qu'elle produisent chez ceux qui les cultivent. La premiere qualité de l'homme la plus necessaire, celle qui s'etend a toutes ses actions, a tous ses emplois, et qui etant jointe a la droiture du cœur qu'elle doit mettre en œuvre, et conduire par sa lumiere, fait toute sa perfection, c'est la justesse de l'esprit.*

Leçons de Logique par Mr. le Professeur de Felice.

tra aquelles (formaes palavras) *que tendo obrigação de instruir, e formar verdadeiros Mathematicos, como são Engenheiros, Pilotos, e Architectos, lhes dão sómente humas doutrinas superficiaes, que não servem mais, que crear ignorantes, e presumidos com pouca utilidade do bem publico.* Ver-se-ha tambem do contexto da obra que busquei, quanto me foi possivel, conservar a analogia entre as suas partes. (*a*) As *rectas*, e os *planos*; os *triangulos*, e os *tetraedros*; os *parallelogrammos*, e os *parallelipipedos*, &c., são, quasi sempre, tratados debaixo do mesmo ponto de vista: e proposições ha, que vão inteiramente transcriptas de huma ás outras Secções, com a unica differença de mudar as palavras *linha* em *área*, e *área* em *volume*. Pelo que diz respeito áquellas difficuldades, que se tem encontrado em demonstrar alguns Theoremas; a theoria das *parallelas* he que tem dado mais que entender a todos os Geometras. Eu quiz an-

(*a*) *La conservation de l'analogie entre les parties d'un même Traité, est de la plus haute importance, puis qu'en même temps, qu'elle aide la memoire du lecteur, elle l'accoutume a generaliser ses idees.* Lacroix.

antes valer-me do principio da similhança; e me persuado que facilmente se me concederá « Que aquellas rectas, que es- » tão inclinadas a respeito de huma outra » recta, do mesmo modo que a respeito » dessa, ou de outra recta estão inclinadas » outras, que concorrem, tambem devem » similhantemente concorrer. » Quanto ás demais difficuldades; parece-me ter satisfeito. Tal he entre outras, a que offerecia a demonstração do Theorema *n.°* 293; do qual, entre nós, se tem attribuido a José Anastacio da Cunha a gloria de ter sido o primeiro, que dera a demonstração com o rigor geometrico. Os Geometras Francezes parece terem desconhecido por muito tempo o modo de o demonstrar. Legendre, e principalmente Lacroix, dão bem a sentir as difficuldades, que nisso encontrárão, e a falta de convicção, com que o fizerão, em os primeiros Elementos de Geometria, que publicárão; como mesmo manifesta o segundo em o seu discurso preliminar, e na nota da pagina 163, 4.ª edição, dada no anno de 1804; em que então apparece com huma outra demonstração, tal, como a damos com pouca differença nestes Elementos; e que elle suppõe fôra achada

da em primeiro lugar por Mr. Ampere, Professor na Schola Central de Lyão. (*a*) O que nós não concedemos em honra das Letras Portuguezas; e declaramos que a temos lido nos Elementos de Geometria do Padre Manoel de Campos, impressos em Lisboa no anno de 1735, e por consequencia muito anterior a Mr. Ampere. Não duvidamos, com tudo, do merito deste Professor, que póde bem ser ter-se encontrado em seu discurso com o Geometra Portuguez: só não consentimos que se lhe attribua a gloria de primeiro no invento, nem tão pouco a José Anastacio da Cunha, Geometra, bem que tambem nosso, e de distincta reputação.

Certas applicações, taes, como alinhamentos, medição de distancias, configurações, &c., entendi desnecessario tratar aqui; tanto, por terem o seu lugar proprio na Trigonometria rectilinea; como

(*a*) Elle se expressa desta maneira: *Si on ne regarde pas cette demonstration, comme evidente, on la prouvcrá ainsi qu'il suit.* E dando a demonstração, termina dizendo: *Cette demonstration tres simple paroit eté trouvée en premier lieu par Mr. Ampere, Professeur a l'Ecole central de Lyon.*

Esta mesma demonstração vem tambem agora na Geometria de Legendre, impressa no anno de 1812, 9.ª edição.

mo porque requerem o conhecimento de certos instrumentos, para o qual não basta, unicamente, a descripção delles.

AD-

ADVERTENCIA.

Entendemos por *construcções geometricas* aquellas operações graphicas, em que só se emprega a regoa, e o compasso.

Os numeros, que se encontrarem entre parênthesis, são citações de alguma proposição destes Elementos.

Axioma he huma proposição por si mesma evidente.

Theor. significa *Theorema*, isto he, huma proposição, que se ha de demonstrar.

Probl. . . . . . *Problema*, huma questão, que se ha de resolver.

Coroll. . . . . . *Corollario*, huma consequencia de huma proposição demonstrada.

Schol. . . . . . *Scholio*, huma reflexão sobre huma, ou mais proposições precedentes.

Demonstr. . . *Demonstração.*

Adv. . . . . . *Advertencia.*

INDICE

DAS MATERIAS, QUE SE CONTÉM NESTES ELEMENTOS.

Noções geraes, e definições. Pag. 1

PRIMEIRA SECÇÃO.

Das linhas. - - - - - - - - - 3
Dos angulos, e sua medida. - - 9
Das perpendiculares, e obliquas. 17
Dos arcos de circulo, e das suas cordas: das rectas consideradas a respeito da circunferencia do circulo: e das circunferencias consideradas humas a respeito das outras. - - - - - - - - - 25
Das parallelas. - - - - - - - 37
Das linhas rectas, que fechão espaço. - - - - - - - - - 46
Dos angulos considerados no circulo. 51
Da igualdade dos triangulos. - - 56
Das linhas proporcionaes. - - - 67
Dos triangulos similhantes. - - 74

Das

Das linhas proporcionaes consideradas no circulo. - - - - - 86
Dos polygonos. - - - - - - - 90
Dos polygonos inscriptos, e circunscriptos ao circulo. - - - 97
Dos polygonos similhantes. - - 106

SEGUNDA SECÇÃO.

Das superficies. - - - - - - - 115
Da avaliação das áreas, e da sua medida. - - - - - - - - - 123

Introducção á terceira Secção.

Dos planos. - - - - - - - - 140
Das linhas rectas consideradas nas differentes posições, que podem ter a respeito dos planos. 142
Dos planos considerados nas differentes posições, que podem ter huns a respeito dos outros. - 154
Dos angulos solidos. - - - - 166

TERCEIRA SECÇÃO.

Dos corpos. - - - - - - - - 173
De alguns casos da igualdade dos tetraedros. - - - - - - - - 183

Dos

Dos corpos similhantes. - - - 186
Dos polyedros inscriptos, e circunscriptos aos cylindros, pyramides conicas, e á sphera. - - 194
Do modo de comparar, e de avaliar as áreas dos corpos. - - 202
Dos volumes dos corpos. - - - 218
Da avaliação dos volumes, e da sua medida. - - - - - - - 231

ELE-

INDICE. XXV

Der corpus similbarum. - - - - 186
Der polycleros interpretatio cir-
cumscriptionis corporum. - - 194
Der modo de computare, e de ma-
dar ai vivos por corpos. - - - 202
Der numero der corpos. - - - 218
De qualidade das pessoas, e da
sua medida. - - - - - - - 231

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

Noções geraes, e definições.

1. NOtamos em qualquer corpo tres dimensões: comprimento, largura, e profundidade, ou grossura. Se abstrahindo do corpo, consideramos sómente a porção da Extensão em todo o sentido, que elle occupava; resulta a idéa do que se chama *volume.* (*)

Pelo que *volume* he a extensão considerada com tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*, ou *grossura.*

Se abstrahindo da grossura, ou profundidade do volume, examinamos só-

A men-

(*) Muitos Geometras dão tambem ao volume o nome de corpo, ou solido.

mente o seu exterior; resulta a idéa do que se chama *superficie.*

Pelo que *superficie* he a extensão considerada com duas dimensões: *comprimento*, e *largura.*

Se na superficie, abstrahindo da largura, attendemos unicamente ao comprimento; resulta a idéa do que se chama *linha.*

Pelo que *linha* he a extensão considerada com huma só dimensão: *comprimento.*

Se finalmente na linha, abstrahindo do comprimento, notamos sómente o lugar, em que ella termina; resulta a idéa do que se chama *ponto.*

Pelo que *ponto* he o que se considera sem dimensão alguma.

Damos em particular o nome de *área* a huma determinada superficie, isto he, á extensão superficial, que se encerra entre huma, ou mais linhas; as quaes, fechando assim espaço, appresentão hum todo, que se chama *figura.*

Duas figuras são iguaes, quando se podem perfeitamente ajustar.

PRI-

PRIMEIRA SECÇÃO.

Das Linhas.

2. ENtre as linhas se distinguem *rectas*, e *curvas*.

Chamão-se *rectas* aquellas linhas, que não podem ter dous pontos communs, sem que inteiramente se confundão: e *curvas*, todas aquellas, que não são rectas.

A linha, que não póde ser cortada por huma recta em mais de dous pontos, se diz que he *concavo-convexa*.

3. *Coroll.* Dous pontos dados determinão a situação de huma recta; e ao mesmo tempo a sua grandeza, se estes dous pontos são extremos, ou termos della: e esta se diz ser a *distancia* reciproca dos dous pontos.

4. Hum ponto denota-se por meio de huma letra; e huma recta por meio de duas, postas cada huma nos extremos da recta. Assim a recta tirada entre os dous pontos *A* e *B*, *fig.* 1., se nomêa a recta *AB*.

5. As linhas medem-se com outras linhas: porém geralmente a medida commum das linhas, e a mais natural, he a linha recta. Medir huma linha recta, ou curva, he procurar a relação, que ha entre essa linha, e huma recta conhecida, a qual se considera então, como unidade. Por ex. medir huma recta AB, *fig.* 2., he achar a relação, que ha entre AB, e outra recta DE, que se tomou para medida; e se procederá da maneira seguinte. Se for $AB > DE$, applique-se DE pelo seu comprimento successivamente sobre AB, em quanto nesta se poder hir contendo; começando, v. gr., de A para B. Supponha-se que applicada duas vezes até C, ficou o resto $CB < DE$: será $AB = 2.DE + CB$. Applique-se do mesmo modo o resto CB sobre DE; e supponhamos tambem que applicado tres vezes até F, sobrou $FE < CB$: será $DE = 3.CB + FE$. Continue-se da mesma fórma com este segundo resto; e demos que finalmente aconteça caber FE em CB cinco vezes sem resto algum: será $CB = 5.FE$; e por tanto $DE = 16.FE$, e $AB = 37.FE$; ou $AB = \frac{37}{16}.DE$: valor conhecido, pois he expresso na medida, que se escolheo; e donde se tira

que

que as duas linhas *AB*, e *DE* estão entre si, como os numeros 37, e 16; por quanto *AB* : *DE* : : 37 : 16.

Se neste processo ainda ficasse algum resto, continuar-se-hia do mesmo modo. E pois sempre se póde assim continuar, todas as vezes que vão ficando restos: segue-se que, ainda quando não possamos achar exactamente a relação entre duas linhas, sempre nos podemos approximar della, quanto quizermos; e pelo menos, sem erro sensivel, exprimir em numeros a relação, que se dá entre ellas. Taes linhas dizem-se ser *incommensuraveis*.

6. A fim de facilitar a intelligencia do que vamos a dizer ácerca das linhas, supporemos que todas as figuras, em que as considerarmos, vão descriptas sobre a mesma *superficie plana*.

Chama-se assim, ou *plano* simplesmente, *a superficie, sobre que se póde exactameute applicar huma recta qualquer por toda a parte*. Donde se segue que, logo que huma recta tem dous pontos em hum plano, existe toda nelle.

A superficie, que não he plana, chama-se *superficie curva*; e a que não póde ser atravessada por huma recta em

mais

mais de dous pontos, se diz que he *concavo-convexa.*

7. THEOR. *Se dous planos tiverem tres pontos communs, que não estejão em linha recta, os dous planos se confundirão.*

Demonstr. Porque tirando rectas, entre esses tres pontos, de cada hum para cada hum; sejão elles *A*, *B*, *C*, *fig.* 3.; essas tres rectas *AB*, *BC*, *AC*, estarão todas em ambos os planos: e por conseguinte tomando em hum delles hum quarto ponto qualquer *D*, e tirando deste, e nesse plano, huma quarta recta *DE* para huma *BC* daquellas tres, esta *DE* necessariamente tambem ha de encontrar, pelo menos, huma outra *AC* das mesmas tres, visto que todas tres estão em ambos os planos, e *DE* foi tirada em hum delles. Logo, a não se confundirem os planos, virá a recta *DEF* a estar só toda em hum, e não toda em ambos; o que he contra a noção, que acabámos de dar do *plano.*

8. *Coroll.* Logo tres pontos, que não estão em linha recta, determinão a situação de hum plano.

9.

9. De todas as linhas curvas trataremos unicamente da *circunferencia do circulo.*

Este se define *a figura terminada em hum plano por huma só linha, a qual tem todos os seus pontos igualmente distantes de hum outro ponto existente na parte do plano, que ella comprehende.* Este ponto chama-se *centro do circulo.* A linha, que o termina, *circunferencia.* As rectas tiradas do centro para a circunferencia, *raios.* E a que passa pelo centro, e termina de huma, e outra parte na circunferencia, *diametro.* Huma parte qualquer da circunferencia, *arco.* A recta, cujos extremos são os mesmos de hum arco, *corda*, ou *subtendente.* A parte do circulo terminada por hum arco, e pela sua corda, *segmento*: e terminada por hum arco, e pelos raios tirados aos extremos desse arco, *sector.*

10. THEOR. *O diametro divide a circunferencia, e o circulo, cada hum em duas partes iguaes.*

Seja, *fig.* 4., o circulo *CAEBDA*, de que he o centro *C*; e *AB* diametro:

tro: digo que a circunferencia, e o circulo, estão divididos por AB, cada hum em duas partes iguaes.

Demonstr. Imagine-se dobrada a figura pelo diametro AB, e que se applica o segmento $AEBA$ sobre o segmento $ADBA$: todos os pontos do arco AEB cahirão sobre o arco ADB; porque o raio, que se tirasse para hum qualquer a, ou a', que não cahisse sobre o arco ADB, seria $>$ ou $<$ CD, raio do mesmo circulo; e por tanto teria a circunferencia pontos não equidistantes do centro; o que he contra a definição (9). Logo o arco AEB se ajustará sobre o arco ADB; e pois tem os mesmos extremos, será $AEB = ADB$; e por conseguinte $AEBA = ADBA$: mas ambos os arcos fazem a circunferencia, e ambos os segmentos, o circulo; logo cada hum arco he a metade da circunferencia, ou huma semi-circunferencia; e cada hum segmento, a metade do circulo, ou hum semi-circulo. Logo o diametro divide a circunferencia, e o circulo, cada hum em duas partes iguaes.

11. Assentárão em repartir a circunferencia do circulo em 360 partes iguaes, a que derão o nome de *gráos*: cada hum

hum destes em 60 partes iguaes, a que chamárão *minutos*: cada minuto em outras 60 partes iguaes, a que chamárão *segundos*: e assim forão successivamente subdividindo, dando a estas subdivisões de 60 em 60 os nomes de *minutos*, *segundos*, *terceiros*, &c.

O gráo denota-se pelo sinal - - - °
O minuto - - - - - - - - - - ′
O segundo - - - - - - - - - - ″
O terceiro - - - - - - - - - - ‴
&c.

Por ex. 3° 47′ 52″ quer dizer 3 gráos, 47 minutos, e 52 segundos.

Dos angulos, e sua medida.

12. Duas rectas, que concorrem em hum ponto, estão ambas no mesmo plano (7): e então se diz que fazem *angulo*. E formarão sempre hum sector, descrevendo com hum raio qualquer do ponto do concurso, como centro, hum arco, que nellas termine (9). Assim a formação de hum angulo nos conduz á de hum arco; e reciprocamente: e o ponto do concurso das rectas he sempre centro do circulo.

Em geral se diz que fazem *angulo* duas

duas linhas, quaesquer, que concorrem em hum ponto: e este chama-se *vertice* do angulo; e as linhas *lados*: e conforme estas são, ou rectas, ou curvas, ou huma recta, e a outra curva; se lhe dá o nome de *angulo rectilineo*, *curvilineo*, ou *mixtilineo*. E se os lados se prolongão do vertice; o angudo formado pelo prolongamento dos ditos, diz-se que he *verticalmente opposto* a respeito do primeiro: e reciprocamente.

Denota-se hum angulo por meio de tres letras, das quaes huma se põe no vertice, e cada huma das outras no seu lado; nomeando-se a do vertice em segundo lugar. Por ex. para dizermos o angulo formado pelas duas linhas *AC*, e *BC*, *fig.* 5., diremos o angulo *ACB*, ou *BCA*; ou simplesmente *C*, quando não mais de hum angulo tem o vertice no mesmo ponto: porque, no caso contrario, dizendo-se sómente *C*, como na *fig.* 6., não saberiamos de qual dos angulos se fallava; se era do angulo *ACB*, ou do seu verticalmente opposto *GCF*; ou de *ACG*, ou do seu verticalmente opposto *BCF*.

Trataremos unicamente dos angulos rectilineos.

13. Dous angulos são iguaes, quando, applicando o vertice de hum sobre o vertice do outro, e ajustando hum lado sobre hum lado, os outros dous tambem se ajustão, sobrepostos os planos. Mas se entre os dous lados de hum cahe o segundo lado do outro; aquelle angulo se diz maior do que este, ou este menor do que aquelle: e he neste sentido, que os consideramos, como grandezas.

A grandeza pois de hum angulo não depende da de seus lados.

14. THEOR. *Se dous sectores de hum mesmo circulo, ou de circulos iguaes, tiverem arcos iguaes; terão angulos iguaes, áreas iguaes, e serão iguaes. E o que tiver maior arco; terá maior angulo, maior área, e maior será.*

(Denotaremos algumas vezes os arcos por este sinal ⌒ posto por cima das letras, que marcão os seus extremos; a fim de os distinguirmos das cordas.)

1.° Sejão, *fig.* 7., os sectores *CAB*, e *CDE* do mesmo circulo; e seja o arco *AB* = o arco *DE*: digo que o angulo *ACB* he = o angulo *DCE*; a área *CABC* = área *CDEC*; e os sectores iguaes.

De-

Demonstr. Dobre-se o circulo pelo centro; e ajuste-se o raio CB sobre o raio CD: o ponto B cahirá em D, e o arco BA se ajustará sobre o arco DE (9): mas o ponto A cahe então em E, por ser $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ por hypothese; logo tambem CA se ajustará sobre CE (2), e o angulo ACB cobrirá exactamente o angulo DCE, e a área $CABC$ a área $CDEC$. Logo $ACB = DCE$; $CABC = CDEC$; e iguaes os sectores, pois se ajustão perfeitamente.

2.° Seja porém o arco $AD >$ o arco DE: digo que o angulo $ACD >$ o angulo DCE; a área $CADC >$ a área $CDEC$; e o sector $CAD >$ o sector CDE.

Demonstr. Por quanto he $\overset{\frown}{AD} > \overset{\frown}{DE}$; haverá em $\overset{\frown}{AD}$ huma parte $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$: tire-se o raio CB: será o angulo $ACB =$ o angulo DCE; a área $CABC =$ área $CDEC$; e o sector $CAB =$ o sector CDE, pelo que se acabou de demonstrar: mas he evidentemente o angulo $ACD >$ o angulo ACB; a área $CADC >$ a área $CABC$; e o sector $CAD >$ o sector CAB; logo tambem o angulo $ACD >$ o angulo DCE; a área $CDAC >$ a área $CDEC$;

$CDEC$; e o sector $CAD >$ o sector CDE.

15. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se dous sectores do mesmo circulo, ou de circulos iguaes, tiverem angulos iguaes; terão arcos iguaes, áreas iguaes, e serão iguaes. E o que tiver maior angulo, terá maior arco, maior área, e maior será.

16. *Coroll.* 2.° Pelo que, se, dividindo a circunferencia de hum circulo, (cujo centro C) em quantas partes iguaes quizermos, por ex. em 360 partes AB, BD, DE, &c., tirarmos para os pontos da divisão os raios CA, CB, CD, CE, &c.; os angulos ACB, BCD, DCE, &c., assim como os respectivos sectores, serão iguaes. E por isso teremos $ACB : BCD : DCE$: &c. :: $\widehat{AB} : \widehat{BD} : \widehat{DE}$: &c.; e consequentemente $360 \times ACB$ (somma de todos os antecedentes): $360 \times \widehat{AB}$ (somma de todos os consequentes) :: ACB (hum só antecedente): $\widehat{AB}$ (seu consequente); ou como hum numero qualquer de vezes ACB para o mesmo numero de ve-

vezes $\widehat{AB}$; por ex.: : ACD: $\widehat{AD}$: : ACE: $\widehat{AE}$: : &c.

Do mesmo modo se comparão as áreas.

17. THEOR. *Os angulos estão entre si, como os arcos dos sectores formados sobre os seus lados com hum mesmo raio; ou tambem, como as áreas dos mesmos sectores.*

Sejão, *fig.* 8., os angulos ACB, e DEF; e sejão os arcos AB, e DF descriptos com o mesmo raio: digo que ACB: DEF: : $\widehat{AB}$: $\widehat{DF}$.

Demonstr. Supponha-se tomado de A para B hum arco AG = o arco DF, e tirado o raio CG: será o angulo ACG = o angulo DEF (14); e ACB : ACG: : $\widehat{AB}$: $\widehat{AG}$; porque se não está ACB: ACG: : $\widehat{AB}$: $\widehat{AG}$, estará como $\widehat{AB}$ para hum arco $X >$ ou $< \widehat{AG}$. Esteja: : $\widehat{AB}$: $\widehat{X} > \widehat{AG}$; isto he, : : $\widehat{AB}$: $\widehat{Ar}$. Imagine-se dividido o arco AB em tantas partes iguaes, quantas forem neces-

cessarias, para que hum dos pontos da divisão caia entre r, e G; por ex., em i; então, tirando os raios Cr, e Ci, teremos $ACB : ACi :: \widehat{AB} : \widehat{Ai}$ (16): mas tambem suppozemos $ACB : ACG :: \widehat{AB} : \widehat{Ar}$; logo $ACi : ACG :: \widehat{Ai} : \widehat{Ar}$: mas $ACi > ACG$; logo tambem $\widehat{Ai} > \widehat{Ar}$: o que evidentemente he absurdo. Esteja pois $:: \widehat{AB} : \widehat{X} < \widehat{AG}$; isto he $:: \widehat{AB} : \widehat{Ar'}$. Imagine-se então dividido o arco AB em tantas partes iguaes, quantas forem necessarias, para que hum dos pontos da divisão caia entre r', e G, por ex., em i': teremos da mesma fórma $ACB : ACi' :: \widehat{AB} : \widehat{Ai'}$: mas tambem suppozemos $ACB : ACG :: \widehat{AB} : \widehat{Ar'}$; logo $ACi' : ACG :: \widehat{Ai'} : \widehat{Ar'}$. mas $ACi' < ACG$; logo tambem $\widehat{Ai'} < \widehat{Ar'}$: o que evidentemente he absurdo. E pois não está $ACB : ACG :: \widehat{AB} : \widehat{X} >$ ou $< \widehat{AG}$; estará $:: \widehat{AB} : \widehat{AG}$: mas $ACG = DEF$, e

$\widehat{AG}$

$\widehat{AG} = \widehat{DF}$, por construcção; logo $ACB : DEF :: \widehat{AB} : \widehat{DF}$.

Da mesma fórma discorreremos a respeito das áreas.

18. *Coroll.* Pois os angulos são proporcionaes aos arcos dos sectores formados sobre os seus lados com hum mesmo raio; segue-se que podemos representar os angulos pelos ditos arcos, e conhecer por meio destes da sua grandeza.

E com effeito seja ACB, *fig.* 5., hum angulo, que se quer medir; a° o numero de gráos, e partes do gráo do arco do sector formado sobre os seus lados: a somma dos angulos no centro do circulo, de que faz parte o sector, he $360^{\wedge}$; e a circunferencia 360° (denotando $1^{\wedge}$ o gráo angular, ou angulo correspondente ao arco de $1.^{\circ}$): teremos pois

$360^{\circ} : a^{\circ} :: 360^{\wedge} : ACB = \frac{a^{\circ}}{360^{\circ}} \times 360^{\wedge} = \frac{a}{360} \times 360^{\wedge} = a^{\wedge}$: d'onde se vê que o angulo vem expresso em medidas angulares, e pelo mesmo numero de gráos, e partes do gráo, de que consta o arco. Pelo que póde o arco representar

tar o angulo; e he neste sentido, que daqui em diante diremos que lhe serve de medida.

Das perpendiculares, e obliquas.

19. THEOR. *Se huma recta cahir sobre outra recta; fará com esta, prolongada, se for necessario, dous angulos, cada hum da sua parte, que juntos valeráõ* 180°.

Caia, *fig.* 9, a recta AC sobre a recta BD, fazendo com esta dous angulos ACB, e ACD, cada hum da sua parte: digo que $ACB + ACD = 180°$.

Demonstr. Faça-se centro em C, e com hum raio qualquer CE se descreva a semi-circunferencia EFG: será $\overset{\frown}{EF}$ a medida de ACB; e $\overset{\frown}{FG}$ a medida de ACD (18): porém $\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FG}$ fazem a semi-circunferencia $EFG = 180°$; logo $ACB + ACD = 180°$.

20. *Coroll.* 1.° Se os dous angulos são iguaes, cada hum he $= 90$: e chamão-se *angulos rectos*; e a linha

incidente, *perpendicular*: se desiguaes, o maior he $> 90°$, e o menor $< 90°$: e chama-se aquelle, *angulo obtuso*; e este, *angulo agudo*; e a linha incidente, *obliqua*, ou *inclinada*.

21. *Coroll.* 2.° Logo, se huma recta for perpendicular a outra recta, tambem esta o será a respeito daquella.

22. *Coroll.* 3.° De hum mesmo ponto tomado em huma recta não se póde levantar mais do que huma perpendicular a essa recta.

23. Dous angulos, cuja somma he 180°, se dizem *supplementos* hum do outro: e aquelles, cuja somma, ou differença he 90°, se dizem *complementos*.

24. *Coroll.* 1.° Os angulos, que são iguaes, tem supplementos, e complementos iguaes: e reciprocamente os que tem supplementos iguáes, ou complementos iguaes, são iguaes; sendo porém ou ambos agudos, ou ambos obtusos, os que tiverem complementos iguaes.

25. *Coroll.* 2.° Logo os angulos verticalmente oppostos são iguaes; por ex. *fig.* 6, $ACB = GCF$. Porque ACG he supplemento, tanto de ACB, como de GCF.

26.

26. THEOR. *Se duas obliquas a huma mesma recta, tiradas de hum mesmo ponto, tomado fóra desta, forem iguaes; ellas se desviarão igualmente da perpendicular, que do dito ponto se abaixar sobre a dita recta; isto he, cahirá essa perpendicular no meio da porção da recta intercepta pelas obliquas, e fará com cada huma hum angulo igual. E se as obliquas forem desiguaes; a menor se desviará menos da perpendicular, e fará com ella hum angulo menor.*

1.° Sejão, *fig.* 10, CA, e CB duas obliquas iguaes, tiradas do ponto C para a recta EF: digo que CA, e CB se desvião igualmente da perpendicular abaixada do mesmo ponto C sobre EF; isto he, $DA = DB$, e CD perpendicular.

Demonstr. Imagine-se dividido o angulo ACB em duas partes iguaes pela recta CD; e que por ella se dobra a figura, e se sobrepõe o plano CDA ao plano CDB: a recta CA cahirá sobre a recta CB, por ser o angulo $ACD =$ o angulo DCB, por construcção; e o ponto A sobre o ponto B, por ser $CA = CB$,

por hypothese : por conseguinte DA se ajustará sobre DB (2) ; e pois tem os mesmos extremos , será $DA = DB$: o angulo ADC cobrirá exactamente o angulo CDB ; e por isso será $ADC = CDB$: logo CD será perpendicular ao meio de AB (20) : logo &c.

E ao mesmo tempo fica provado , que a perpendicular faz com cada huma das obliquas hum angulo igual.

2.° Seja porém , *fig.* 11 , $CA > CB$: digo que CB se desvia menos da perpendicular , do que CA.

Demonstr. Sobre CB , continuada , tome-se huma parte $Cr = CA$; e fazendo centro em C , e com o raio CA , se descreva hum arco , o qual passará pelo ponto r ; e cortará AF em hum ponto n : tire-se Cn : e porque $Cn = CA$; abaixando-se de C sobre EF a perpendicular CD , será $DA = Dn$, segundo se acabou de demonstrar : mas $Dn > DB$; logo tambem $DA > DB$: logo CB se desvia menos da perpendicular , do que CA.

E do mesmo modo se provará ser $ACD > BCD$; isto he , que a obliqua menor faz com a perpendicular hum angulo menor.

27. *Coroll.* 1.° Reciprocamente : se duas

duas obliquas a huma mesma recta; tiradas de hum mesmo ponto tomado fóra desta, se desvião igualmente da perpendicular abaixada do dito ponto sobre a dita recta, ou fazem com ella angulos iguaes; essas obliquas são iguaes. E as que menos se desvião, ou fazem com ella angulo menor, menores são.

28. *Coroll.* 2.° Logo a perpendicular he a minima; e por consequencia a unica, que de hum ponto, tomado fóra de huma recta, se póde abaixar sobre essa recta. (He por ella que se mede a distancia, que vai de hum ponto a huma recta.)

29. *Coroll.* 3.° De hum mesmo ponto para huma recta não se podem tirar tres rectas iguaes: nem tres, de que duas sendo iguaes entre si, e maiores que a terceira, estejão de hum mesmo lado dessa terceira.

30. *Coroll.* 4.° A perpendicular levantada ao meio de huma recta passa por todos os pontos, que estiverem igualmente distantes dos extremos dessa recta; e só passa por esses: e divide por conseguinte em duas partes iguaes o angulo, que em cada hum dos

di-

ditos pontos fazem as obliquas tiradas para aquelles extremos. Porque a perpendicular, que de taes pontos se abaixar sobre a dita recta, cahirá no meio della; e ahi não póde haver mais do que huma perpendicular (22). E se fosse possivel passar esta por algum outro ponto não equidistante daquelles extremos; a perpendicular delle tirada, não cahiria no meio da recta: contra o supposto.

31. *Schol.* « Conclue-se pois: que » teremos huma recta perpendicular a » outra recta, todas as vezes que a fi- » zermos passar por dous pontos, cada » hum dos quaes diste igualmente de ou- » tros dous tomados em estoutra. »

32. THEOR. *Se de qualquer ponto de huma recta, obliqua a outra recta, o qual não seja o do seu encontro, se abaixar sobre estoutra huma perpendicular; esta cahirá sempre da parte do angulo agudo, formado por aquellas rectas.*

Seja, *fig.* 12, a recta *AB* obliqua á recta *CD*; e seja o angulo $ABD < 90°$: digo que a perpendicular, abaixada do ponto *A* sobre *CD*, cahirá da parte do angulo *ABD*. De-

Demonstr. Porque se cahisse da outra parte, como por ex. AC; a perpendicular, que do ponto B se levantasse a CD, a encontraria em hum ponto E: o que he absurdo (28).

33. THEOR. *Se de hum mesmo ponto, fóra de huma recta, se tirarem para os extremos della outras duas rectas; será a somma destas duas maior do que a dita recta.*

Sejão, *fig.* 13, e 14, as rectas CA, e CB, tiradas do ponto C para os extremos da recta AB: digo que $CA + CB > AB$.

Demonstr. Supponha-se tirada do ponto C sobre AB a perpendicular CD: será $AC > AD$; e $CB > DB$ (28): logo tambem $AC + CB > AD + BD$: porém $AD + BD$, *fig.* 13., he a mesma recta AB; ou, *fig.* 14, $> AB$; logo $AC + CB > AB$.

34. PROBL. *No meio de huma recta dada levantar huma perpendicular.*

Seja, *fig.* 15, AB a recta.

Solução. Tome-se de hum dos extremos

mos A na dita recta huma parte arbitraria; e então ou essa porção he a metade da recta, ou maior, ou menor: tome-se sempre maior; e com ella, como raio, e fazendo centro em A, se descreva hum arco EF; e com o mesmo raio, e fazendo depois centro em B, se descreva outro $\widehat{GH}$; o qual corte o primeiro em hum ponto C. Do mesmo modo, e com o mesmo, ou diverso raio, se determine outro ponto C', ou C''; ou fique por baixo, ou por cima da recta AB. Tire-se por estes dous pontos C, e C' a recta CC': digo que esta he a perpendicular pedida (31).

35. *Schol.* "Serve esta proposição para dividir huma recta em duas partes iguaes."

36. PROBL. *De hum ponto dado tirar huma perpendicular a huma recta dada.*

Seja, *fig.* 16, AB a recta; e C o ponto.

Solução. Faça-se centro em C; e com hum raio CD, tal, que descrevendo hum arco, este corte AB, marquem-se os pontos D, e E: destes, como centros, e com

com hum raio maior que a metade de *DE* (34), se descrevão outros dous arcos, que se cortem em *C'*, ou *C''*; e tire-se por estes dous pontos *C*, e *C'* a recta *CC'*: digo que esta recta he a perpendicular pedida (31).

37. *Schol.* « Se o ponto *C* estivesse » na mesma recta *AB*, *fig.* 17, se faria » a mesma construcção, tomando *CD* = » *CE*, &c. Porém se o ponto *C* tives- » se tal situação, que se não podesse » marcar hum dos dous pontos *D*, ou » *E*, como, por ex., se quizessemos le- » vantar huma perpendicular no extre- » mo *B* da recta *AB*, *fig.* 18; conti- » nuar-se-hia a recta *AB*, e se faria de- » pois a construcção pela mesma manei- » ra. »

Dos arcos de circulo, e das suas cordas: das rectas consideradas a respeito da circunferencia do circulo: e das circunferencias consideradas humas a respeito das outras.

38. Do que deixamos dito (26, e 30), se segue que, se huma recta *CG*, *fig.* 19, perpendicular a huma corda *AB* de

de hum circulo *CAEA*, (cujo centro he *C*), passar por hum dos tres pontos, *centro do circulo*, *meio da corda*, e *meio do arco*, que essa corda sostenta; a dita recta passará pelos outros dous. E reciprocamente: que se huma recta passar por dous desses pontos, passará pelo terceiro, e será perpendicular á corda.

Tirando aos extremos della os raios *CA*, e *CB*, he manifesta a conclusão.

39. THEOR. *Se em hum semi-circulo, ou em semi-circulos iguaes, forem iguaes dous arcos; as cordas desses arcos serão iguaes. E se os arcos forem desiguaes; será maior a corda pertencente ao arco maior.*

1.° Seja, *fig.* 19, o circulo *CABEA*; cujo centro he *C*; e seja o arco $AB =$ o arco DE: digo que a corda $AB =$ corda DE.

Demonstr. Dobre-se o circulo pelo centro, e de modo que se applique o ponto *B* sobre o ponto *D*: o arco *BA* se ajustará sobre o arco *DE* (9); e o ponto *A* cahirá sobre o ponto *E*, por ser $\widehat{AB} = \widehat{DE}$, segundo a hypothese:

lo-

logo tambem AB se ajustará sobre DE: e, pois tem os mesmos extremos, será $AB = DE$.

2.° Seja porém, *fig.* 20, $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{DE}$: digo que $AB > DE$.

Demonstr. Suppponha-se tomado de A para B hum arco $AF = \overset{\frown}{DE}$: será $AF = DE$, pelo que se acabou de demonstrar: e por tanto, se AB não $> DE$, tambem não $> AF$; e então será, ou $=$, ou $< AF$. Seja $AB = AF$: tire-se BF; e conceba-se ao meio de BF levantada huma perpendicular: ella passará pelo ponto A, pois $AB = AF$; e tambem pelo ponto C, por ser este o centro do circulo (38): mas isto não póde ser (22); logo AB não $= AF$. Seja pois $< AF$. Faça-se centro em A, e com o raio AB se descreva hum arco, o qual cortará $\overset{\frown}{AF}$ em hum ponto F': será a corda $AF' = AB$: tire-se BF'; e teremos da mesma sorte, que a perpendicular levantada ao meio de BF', passará pelo ponto A, e tambem pelo centro C: mas isto não póde ser; logo AB não $< AF$. E pois não $=$, ou $<$; será $AB > AF$; ou $AB > DE$, por ser $AF = DE$.

40. *Coroll.* Reciprocamente: se em hum semi-circulo, ou em semi-circulos iguaes, duas cordas forem iguaes; os arcos dessas cordas serão iguaes. E se ellas forem desiguaes; será maior o arco pertencente á corda maior.

41. PROBL. *Em hum ponto dado de huma recta fazer hum angulo igual a outro angulo dado.*

Seja, *fig.* 21, *AB* a recta; *C* o ponto; e *acb* o angulo.

Solução. Fazendo centro em *c*, e com hum raio qualquer *cg*, se descreva o arco *ge*; e tire-se a sua corda *eg*. Com o mesmo raio *cg*, e fazendo centro em *C*, se descreva o arco indefinido *EH*; e com hum raio igual á corda *eg*, e fazendo centro em *E*, se descreva hum arco, que corte $\widehat{EH}$ em hum ponto *G*: por este ponto, e pelo ponto *C*, se tire a recta *GC*: digo que tenho construido o angulo *GCB* = o angulo *acb*, como se pedia. (14, e 40).

Facilmente se vê que este Problema admitte quatro soluções: e teria só duas, quando se houvesse de construir

o

o angulo em hum dos extremos da recta.

42. PROBL. *Dividir hum angulo, ou hum arco, em duas partes iguaes.*

Seja, *fig.* 22, o angulo *ACB*.

Solução. Faça-se centro em *C*, e com hum raio qualquer *Ca*, se descreva o arco *ab*: tire-se a sua corda; e ao meio della se levante a perpendicular *CD* (34): digo que tenho dividido o angulo proposto em duas partes iguaes, a saber: *ACD* = *DCB* (38, ou 30).

Facilmente se vê, que se fosse questão dividir hum arco em duas partes iguaes, se levantaria huma perpendicular ao meio da sua corda.

43. PROBL. *Achar o centro de hum circulo, cuja circunferencia, ou só hum arco está descripto.*

Seja, *fig.* 23, *ABDA*, a circunferencia do circulo, cujo centro se pretende.

Solução. Tomem-se nella tres pontos quaesquer *A*, *B*, e *D*; e tirando as cordas *AB*, e *BD*, levantem-se ao meio de cada huma as perpendiculares *FL*, e *EM*: digo que estas se cortaráõ, ou con-

cor-

correráõ em hum ponto *C*; e que esse he o centro do circulo.

Demonstr. Com effeito o centro deve estar tanto na recta *FL*, como na recta *EM*: mas este he só em hum ponto; logo não póde ser em outro, senão no de concurso, ou intersecção das ditas rectas, que he o unico commum a ambas: logo ellas concorreráõ em hum ponto *C*, e esse he o centro.

O mesmo praticariamos, quando, sendo dado hum arco de circulo, se tratasse de o continuar.

44. *Coroll.* Logo duas circunferencias de circulo não podem ter tres pontos communs, sem inteiramente se confundirem. Porque tirando rectas de hum destes pontos para os outros dous, essas rectas serião cordas de ambos os circulos; e por conseguinte o centro de ambos estaria no mesmo ponto do concurso das perpendiculares levantadas ao meio dessas cordas. Logo a recta, tirada do dito centro para hum daquelles pontos, seria raio de ambos os circulos: e he evidente que com o mesmo raio, e centro, se não descrevem dous circulos distinctos.

45. THEOR. *Se huma recta, tendo de commum hum ponto com a circunferencia de hum circulo, prolongada a não cortar; só terá de commum esse ponto com a dita circunferencia*: (*e chamar-se-ha* tangente). *E se a cortar; só poderá ter dous*: (*e chamar-se-ha* secante).

1.° Seja, *fig.* 24, *ABDA*, a circunferencia de hum circulo (cujo centro he *C*); e tenha de commum com huma recta o ponto *A*, de modo que esta a não corte, sendo prolongada: digo que a dita recta só terá de commum com a circunferencia esse ponto *A*.

Demonstr. Se he possivel, tenha hum segundo ponto, por ex. *a*: tirem-se raios para estes dous pontos: a perpendicular, que do centro *C* se abaixar sobre a dita recta, cahirá entre elles (26): ora esta perpendicular he menor, que qualquer destes raios (28); logo encontrará a dita recta dentro do circulo; o que he contra a hypothese: logo ella só tem de commum com a circunferencia o ponto *A*.

2.° Tenha porém a dita circunferencia o ponto *A* de commum com huma recta, que, prolongada, a corte: digo que

não

não poderá ter mais do que hum outro ponto commum, por ex. *B*.

Demonstr. Se he possivel, tenha hum terceiro ponto, por ex. *a*: tirem-se raios para estes tres pontos: pelo *n.°* 29 se demonstra a impossibilidade.

46. *Coroll.* 1.° A menor recta, que do centro de hum circulo se póde tirar para a tangente, he o raio, que vai ao ponto do contacto. Porque qualquer outra recta, que do centro se tirasse para a tangente, sahiria fóra do circulo; e seria por conseguinte maior, do que o raio.

47. *Coroll.* 2.° He pois qualquer tangente á circunferencia de hum circulo, perpendicular ao raio tirado ao ponto do contacto (28): e por conseguinte unica nesse ponto (22).

48. *Schol.* « Pelo que havendo-se » de tirar huma tangente a qualquer pon- » to de huma circunferencia, levantar- » se-ha huma perpendicular no extremo » do raio tirado a esse ponto: e será » tangente. »

49. THEOR. *Se duas circunferencias de circulo passarem por hum mesmo ponto da recta, que prende os seus centros;*

as

as ditas circunferencias só terão de commum esse ponto, em que por conseguinte se tocarão. E reciprocamente: se duas circunferencias se tocarem em hum ponto; esse ponto, e os seus centros estarão na mesma recta.

Sejão, *fig.* 25, *ABDA*, e *AbdA* duas circunferencias de circulo, cujos centros *C*, e *c*; e passem pelo ponto *A* da recta *Cc*, que prende os ditos centros: digo que estas circunferencias só tem de commum esse ponto *A*, em que por conseguinte se tocão.

Demonstr. Se he possivel, tenhão tambem hum outro ponto commum, por ex. *D*: tirem-se deste para os centros *C*, e *c* os raios *CD*, e *cD*: e será $CD + cD > Cc$ (33): mas he $CD = CA$, e $cD = cA$; logo tambem $CA + cA$, isto he, $Cc > Cc$: o que he manifesto absurdo. Logo &c.

Se as circunferencias forem *ABDA*, e *AgdA*; se demonstrará do mesmo modo, isto he, será $CC' + C'D > CD$, ou $CC' + C'A > CA$: absurdo tambem manifesto.

Reciprocamente. Toquem-se agora, *fig.* 26, as duas circunferencias *ABDA*, e *AdgA* no ponto *A*: digo que este ponto,

to, e os seus centros estarão em a mesma recta.

Demonstr. Se he possivel, não estejão; e seja a recta Cc aquella, que prende os centros; e estes C, e c. Tirem-se delles ao ponto do contacto A os raios CA, e cA: será $AC + Ac > Cc$: mas he $CA = Cb$; e $cA = cd$; logo tambem $Cb + cd > Cc$: o que he manifesto absurdo.

Se as circunferencias forem $AbDA$, e $Ad'g'A$; e Cc' a recta, que prende os seus centros; se demonstrará do mesmo modo: isto he, será $Cc' + c'A > CA$, ou $Cc' + c'd' > Cb$: absurdo tambem manifesto.

50. *Coroll.* Duas circunferencias de circulo, que se tocão em hum ponto, tem nesse ponto a mesma tangente. Porque ella he a perpendicular ahi levantada sobre a recta, que prende os seus centros. (47)

51. *Coroll.* Duas circunferencias de circulo de raios desiguaes não se tocão em mais de hum ponto: nem as de raios iguaes, se estas se tocão exteriormente. Porque se acaso se tocassem em dous pontos; esses dous pontos estarião ambos na recta, que passa pelos seus centros; o que daria o absurdo de haver em hu-

huma circunferencia dous pontos não equidistantes do centro.

52. PROBL. *Descrever huma circunferencia de circulo com hum raio determinado, a qual toque huma outra dada em hum ponto tambem dado.*

Seja, *fig.* 27, *ADA* a circunferencia dada; e *A* o ponto, em que se quer que a toque outra descripta com o raio *bc*.

Solução. Pelo centro *C*, (que se deve primeiramente achar, se não for dado), e pelo ponto *A*, se tire a recta indefinida *CL*; e tome-se de *A* para *L* na recta *CL* huma parte $AB = bc$; ou de *A* para *C* na recta *AC*, prolongada, se for necessario, a parte $AC' = bc$: faça-se centro em *B*, e com o raio *BA* se descreva a circunferencia *AEGA*; ou faça-se centro em *C'*, e com o raio *C'A* se descreva a circunferencia *AFA*: digo que qualquer destas duas circunferencias satisfaz ás condições do Problema.

53. PROBL. *Por hum ponto dado fazer passar huma circunferencia de circulo, que toque huma outra dada em hum ponto tambem dado.*

Seja, *fig.* 28, e 29, *B* o ponto, por onde deve passar a circunferencia de circulo; e *A* aquelle da circunferencia *AEGA*, em que deve tocar.

Solução. Do ponto *A* para o centro *C* tire-se o raio *CA*; e para o ponto *B* a recta *AB*: no meio desta se levante a perpendicular *LN*; e do ponto *C'*, em que esta encontrar o raio *CA* prolongado, se descreva, como centro, e com o raio *C'A*, a circunferencia *AFBA*: digo que esta he a circunferencia pedida; isto he, passará pelo ponto *B*, e tocará no ponto *A* a circunferencia *AEGA*.

Prova-se pelos n.os 49, e 38; discorrendo, como no Problema n.° 43.

54. *Schol.* "Se, em lugar de huma circunferencia, fosse questão fazer tocar-se huma recta *DE*, *fig.* 30, em hum ponto dado *A*, por huma circunferencia de circulo, que ao mesmo tempo passasse por outro ponto *B*; a construcção seria a mesma; com a unica differença de se levantar no ponto *A* a perpendicular *AC* sobre a recta *DE* (48)."

Comtudo em hum, e outro caso póde huma vez ser impossivel o Problema.

Das

Das parallelas.

55. He axioma: que se duas rectas, que fazem angulos com huma terceira, prolongadas concorrem; outras duas rectas, que fizerem com a mesma, ou com outra terceira, angulos respectivamente iguaes, para a mesma parte, similhantemente concorreráõ. Com effeito se os angulos, *fig.* 31, *CAB*, e *CBA*, são respectivamente iguaes aos angulos *GEF*, e *HFE*; e as rectas *AC*, e *BC* concorrem; tambem similhantemente concorreráõ as duas *EG*, e *FH*.

56. As rectas, que estando no mesmo plano, por mais que se prolonguem de huma e outra parte, se não encontrão, chamão-se *parallelas*. A recta, que as corta, *secante*. Diz-se que os angulos formados pela secante com cada huma das parallelas, são *internos*, ou *externos*, conforme estão entre as parallelas, ou não: e que são *da mesma banda*, ou *alternos*, conforme estão da mesma, ou differente banda da secante.

57. THEOR. *Se duas rectas forem pa-*

parallelas, e for huma terceira perpendicular a huma dellas; será a mesma terceira tambem perpendicular á outra; produzidas, sendo necessario.

Sejão, *fig.* 32, as rectas parallelas *AB*, e *CD*; e seja *EF* perpendicular a *AB*: digo que tambem *EF* he perpendicular a *CD*.

Demonstr. Não seja *EF* perpendicular a *CD*: hum dos angulos *CFE*, ou *EFD*, será agudo: seja *CFE*. De hum ponto qualquer *C* da recta *FC*, continuada até onde o quizermos, se abaixe huma perpendicular *CO* a *FE* (32): he manifesto que as duas rectas *CD*, e *CO* fazem com a terceira *FE* o angulo *CFE*, e o recto *COF*; e que as duas *CD*, e *AB* fazem com a mesma terceira *FE* o mesmo angulo *CFE*, e tambem o recto *AEF*. Ora as duas *CD*, e *CO* concorrem em *C*; logo tambem concorreráõ as duas *CD*, e *AB* (55): o que he contra a hypothese. Logo &c.

58. *Coroll.* Duas rectas parallelas a huma terceira, serão parallelas entre si. Porque se o não forem, concorreráõ em hum ponto; e então desse ponto abaixando huma perpendicular á dita tercei-

ceira, ella seria tambem perpendicular no dito ponto ás outras duas; isto he, teriamos a hum ponto de huma mesma recta duas perpendiculares; o que he absurdo.

59. THEOR. *Se duas rectas, cortadas por huma terceira, fizerem com esta para a mesma banda o angulo externo igual ao interno; essas duas rectas serão parallelas. E não o serão, se os ditos angulos não forem iguaes.*

1.° Sejão, *fig.* 33, as rectas *AB*, e *CD*, cortadas por *EF*; e seja o angulo externo *EGB* = o interno *GHD* da mesma banda: digo que *AB* he parallela a *CD*.

Demonstr. Sendo *EGB* = *GHD* por hypothese; e *GHD* = *CHF* (25); e *EGB* = *AGH*; será *EGB* = *GHD* = *CHF* = *AGH*; de sorte que as rectas *AB*, e *CD* fazendo com *EF* o angulo externo igual ao interno para huma banda; tambem fazem para a outra banda igual angulo externo, igual a igual angulo interno d'estoutra mesma banda. Isto posto, se as ditas rectas não são parallelas, prolongadas concorreráõ de huma destas bandas. Ora não ha razão, pa-

para que concorrão desta, e não daquella; logo concorreráõ de ambas: o que he absurdo (2). Logo será *AB* parallela a *CD*.

2.° Sejão porém, *fig.* 34, as rectas *IL*, e *CD* cortadas por *EF*; e seja o angulo externo *EGL* não = o interno *GHD* da mesma banda: digo que *IL* não he parallela a *CD*.

Demonstr. Supponhamos que o seja: e pois os ditos angulos são desiguaes, por hypothese; separe-se no maior, por ex., no angulo *EGL*, hum angulo *EGB* = *GHD* (41): será *AB* parallela a *CD*, pelo que acabámos de demonstrar: mas tambem suppozemos ser *IL* parallela a *CD*; logo tambem *IL* será parallela a *AB* (58): o que he manifesto absurdo. Logo *IL* não he parallela a *CD*.

60. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se duas rectas forem parallelas; farão com qualquer secante o angulo externo igual ao interno da mesma banda. E não igual, se não forem parallelas.

61. *Coroll.* 2.° Tambem são parallelas duas rectas.

1.° Quando, cortadas por huma terceira, os angulos alternos internos são iguaes. E reciprocamente. Porque qualquer

quer desses angulos internos he verticalmente opposto a hum externo da banda do outro interno: e por tanto (25) estamos no caso do *n.°* 59; e do *n.°* 60 a respeito da reciproca.

2.° E pela mesma razão: Quando os angulos alternos externos são iguaes. E reciprocamente.

3.° Quando os angulos internos da mesma banda são supplementos hum do outro. E reciprocamente. Porque cada angulo interno he supplemento do externo, que lhe he contiguo; e por tanto (24) estamos no caso do *n.°* 59; e do *n.°* 60 a respeito da reciproca.

4.° E pela mesma razão: Quando os angulos externos da mesma banda são supplementos hum do outro. E reciprocamente.

62. PROBL. *Por hum ponto, dado fóra de huma recta, tirar outra recta parallela á primeira.*

Seja, *fig.* 35, AB, a recta; E, o ponto.

Solução. Tire-se por elle huma secante qualquer ED; e nelle se faça hum angulo $DEF = DGB$, para a mesma ban-

banda (41): digo que *EF* he a parallela pedida (59).

63. THEOR. *Se dous angulos, que tem os lados parallelos, tiverem as suas aberturas voltadas para a mesma parte; ou hum delles, e o verticalmente opposto ao outro; esses angulos serão iguaes. E serão supplementos hum do outro, quando assim as não tiverem.*

Sejão, *fig.* 36, os angulos *ACB*, e *acb*, cujas aberturas estão voltadas para a mesma parte; e seja *AC* parallela a *ac*; e *BC* parallela a *bc*: digo que *ACB* = *acb*.

Demonstr. Continuem-se os lados *CB*, e *ca*, até concorrerem em hum ponto *D*: será *ACD*, ou *ACB* = *CDc*, por ser *CD* secante a respeito das parallelas *AC*, e *ac* (61): mas tambem *CDc* = *acb*, por ser *cD* secante a respeito das parallelas *BC*, e *bc*; logo tambem *ACB* = *acb*.

Quanto, *fig.* 37, aos dous angulos *ACB*, e *acb*, cujos lados são parallelos, mas não tem as aberturas voltadas para a mesma parte; he facil de ver, se são iguaes: porque, continuando do vertice os lados de hum, por ex., *ac*, e *bc*, se ob-

observará que o seu verticalmente opposto $a'cb'$ he $= ACB$, pelo que se acabou de demonstrar; e se concluirá ser $acb = ACB$ (25).

Os dous porém, *fig.* 38, ACB, e acb, que tem os lados parallelos, mas cujas aberturas, e assim a do verticalmente opposto a hum delles, tal como $a'cb'$, estão voltadas para differentes partes; esses serão supplementos hum do outro. E com effeito o são, por ser acb supplemento de $acb' = ACB$. (19, 23, e 24)

64. THEOR. *Se dous angulos, cujos lados são respectivamente perpendiculares, ou o são, continuados, tiverem as suas aberturas para differentes partes, e da mesma sorte hum delles, e o verticalmente opposto ao outro; esses angulos serão iguaes. E serão supplementos hum do outro, quando assim as não tiverem.*

Sejão, *fig.* 39, e 40, os angulos ACB, e acb, cujas aberturas estão voltadas para differentes partes; e seja AC perpendicular a ac, e BC perpendicular a bc: digo que $ACB = acb$.

De-

Demonstr. Tire-se pelo ponto *c* a recta *cd* parallela a *AC*; e a recta *ce* parallela a *BC* (62): será *dc* perpendicular a *ac* (57); e *ec* perpendicular a *bc*: logo o angulo *ecb* será = *dca*; e por tanto tirando de hum, e outro o commum *bcd*, *fig.* 39; ou ajuntando, *fig.* 40; ficará *acb* = *dcc*: mas he *dce* = *ACB* (63); logo tambem *ACB* = *acb*.

Quanto á segunda parte; he facil de ver, *fig.* 41, que os angulos *ACB*, e *acb*, ou *a'cb'*, cujos lados são respectivamente perpendiculares, mas que tem as aberturas para a mesma parte; esses são supplementos hum do outro: por quanto he *acb*, ou *a'cb'*, supplemento de *acb'* = *ACB*, segundo se acabou de demonstrar.

65. THEOR. *Se duas cordas forem parallelas; ou huma corda, e huma tangente; os arcos interceptos serão iguaes E reciprocamente.*

Sejão, *fig.* 42, as cordas *AB*, e *ED* parallelas: digo que o arco *AE* = o arco *BD*.

Demonstr. Do centro *C* se abaixe sobre huma das cordas, por ex., *AB*, a per-

perpendicular CF: será CF tambem perpendicular sobre ED (57): e por consequencia $\widehat{AF} = \widehat{BF}$; e $\widehat{EF} = \widehat{DF}$ (38): logo, se tirarmos $\widehat{EF}$ de $\widehat{AF}$, e $\widehat{DF}$ de $\widehat{BF}$, ficará $\widehat{AE} = \widehat{BD}$.

Quanto á reciproca; segue-se desta por absurdo: porque se AB não he parallela a ED, sendo $\widehat{AE} = \widehat{BD}$; a parallela a ED, que pelo ponto A se tirasse, não interceptaria com ED hum arco $= \widehat{AE} = \widehat{BD}$; pois seria $>$ ou $< \widehat{BD}$.

Do mesmo modo discorreremos a respeito das parallelas corda, e tangente.

66. *Coroll.* Quando huma tangente he parallela a huma corda, o ponto do contacto he o meio do arco, que essa corda sostenta.

67. *Schol.* „ Esta proposição póde, „ entre outros usos, servir para tirar por „ hum ponto dado huma parallela a hu„ ma recta dada. „

Das

Das linhas rectas, que fechão espaço.

68. O menor numero de linhas rectas, que se póde empregar para fechar espaço, he o de tres. Concorrendo duas a duas, ellas formão tres angulos, que estão todos no mesmo plano (8); e por isso

Chama-se *triangulo rectilineo*, ou simplesmente *triangulo*, a figura, que resulta do espaço assim fechado; e este he a área do triangulo; e as linhas, que o terminão, se dizem *lados*. Se todos tres são iguaes; chama-se *triangulo equilatero*. Se dous sómente iguaes, *triangulo isosceles*. E se todos desiguaes, *triangulo scaleno*. Sete pois são as cousas, que se distinguem em hum triangulo; a saber: tres angulos; tres lados; e a área.

69. A somma de dous quaesquer lados de hum triangulo he maior, do que o terceiro. He consequencia do que dissemos (33).

70. *Coroll.* Não pois quaesquer tres rectas fecharáõ sempre espaço, se a somma de quaesquer duas for igual, ou menor, do que a terceira.

71.

71. THEOR. *Os tres angulos de qualquer triangulo equivalem todos juntos a dous angulos rectos, ou* 180°.

Seja, *fig.* 43, o triangulo *ABC*: digo que $ACB + CBA + BAC = 180°$.

Demonstr. Prolongue-se hum dos lados, por ex., *AC*; e pelo ponto *C* tire-se *CE* parallela a *AB*: será $BCE = CBA$; e $ECD = BAC$ (60, e 61); e por conseguinte $BCE + ECD$, ou $BCD = CBA + BAC$: mas $ACB + BCD = 180°$ (19); logo tambem $ACB + CBA + BAC = 180°$.

72. *Coroll.* 1.° Hum triangulo não póde ter mais do que hum angulo recto: e então chama-se *triangulo rectangulo*: não mais, do que hum angulo obtuso: e então chama-se *triangulo obtusangulo*: e póde-os ter todos agudos: e então chama-se *triangulo acutangulo.*

Indistinctamente chamão-se *triangulos obliquangulos* aquelles, que não são rectangulos.

No triangulo rectangulo o lado, que fica opposto ao angulo recto, tem o nome de *hypothenusa.*

73. *Coroll.* 2.° Os dous angulos de hum

hum triangulo rectangulo são entre si complementos.

74. *Coroll.* 3.° Quando dous angulos de hum triangulo, ou a sua somma, são iguaes a dous angulos de outro triangulo, ou á sua somma; o terceiro angulo de hum he igual ao terceiro angulo do outro.

75. *Coroll.* 4.° Dados dous angulos de hum triangulo, ou a sua somma; acha-se o valor do terceiro, tirando a dita somma de 180°.

76. *Schol.* « No mesmo Theorema » fica incidentemente provado que, pro- » duzindo qualquer lado *AC* de hum trian- » gulo, o angulo externo *BCD* he igual » á somma dos dous internos *CBA*, e » *BAC*, que lhe são oppostos. »

77. THEOR. *Se em qualquer triangulo forem iguaes dous lados; os angulos, que lhes são oppostos, serão iguaes. E se forem desiguaes dous lados; será maior o angulo opposto ao lado maior.*

1.° Seja, *fig.* 44, o triangulo *ABC*; e seja $AB = BC$: digo que o angulo $C =$ o angulo *A*.

Demonstr. Do ponto *B* se abaixe sobre

bre o lado opposto AC a perpendicular BD: será ABD complemento do angulo A; e DBC complemento do angulo C (73): mas he $ABD = DBC$ (26); logo $C = A$ (24).

2.° Seja porém, *fig.* 45, $AB > BC$: digo que $C > A$.

Demonstr. Feita a mesma construcção, será ABD complemento do angulo A; e DBC, complemento do angulo C: mas $ABD > DBC$ (26); logo $C > A$.

Se a perpendicular BD cahisse fóra do angulo ABC, ou fosse o mesmo lado BC; então por si mesmo era manifesto ser o angulo $C > A$, por ser C obtuso no primeiro caso, e recto no segundo (32, e 72).

78. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se em qualquer triangulo forem iguaes dous angulos; os lados, que lhes são oppostos, serão iguaes. E se forem desiguaes dous angulos, será maior o lado, que fica opposto ao angulo maior.

79. *Coroll.* 2.° O triangulo, que for equilatero, será equiangulo. E reciprocamente.

80. PROBL. *Dado hum triangulo, descrever huma circunferencia de circulo,*

que passe pelos vertices dos tres angulos do dito triangulo.

Seja, *fig.* 46, o triangulo *ABD.*

Solução. Levante-se ao meio de cada hum de dous lados *AB*, e *BD*, as perpendiculares *LM*, e *NO*, as quaes necessariamente concorreráõ em hum ponto *C*; porque não concorrendo, seria *LM* parallela a *NO*; e por conseguinte, sendo *AB* perpendicular a *LM*, produzida seria tambem perpendicular a *NO* (57); e logo *AB* parallela a *BN*, por ser *BN* por construcção tambem perpendicular a *NO*: o que he manifesto absurdo. Descreva-se pois do ponto *C*, como centro, e com hum dos intervallos *CA*, ou *CB*, como raio, huma circunferencia de circulo: digo que esta passará pelos tres pontos *A*, *B*, *D*.

Demonstr. Com effeito o ponto *C* distando tanto de *A*, como de *B*, como de *D* (30), a circunferencia acima descripta passará por esses pontos.

Chama-se a esta construcção *circunscrever* hum circulo a hum triangulo; e o circulo se diz estar *circunscripto*, e o triangulo *inscripto*. Em geral; quando huma figura qualquer tem os vertices

dos

dos seus angulos na circunferencia de hum circulo; a figura se diz estar *inscripta*, e o circulo *circunscripto*: e reciprocamente o circulo se diz estar *inscripto*, e a figura *circunscripta*, quando os lados da figura são tangentes á circunferencia do circulo.

Dos angulos considerados no circulo.

81. THEOR. *Se hum angulo, cujos lados encontrão a circunferencia de hum circulo, tiver o vertice,* 1.° *na circunferencia desse circulo; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados:* 2.° *se dentro do circulo; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados, e mais metade do arco intercepto pelos mesmos lados prolongados do vertice:* 3.° *se fóra do circulo; terá por medida metade do arco concavo menos metade do arco convexo, interceptos pelos ditos lados.*

1.° Seja, *fig.* 47, o angulo *ABD*, que tem o vertice na circunferencia *ABDA*: este ou he formado por huma corda, e hum diametro; ou por duas cordas; ou

por huma corda, e huma tangente. Seja pela corda AB, e pelo diametro BD: digo que ABD tem por medida $\frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AD}$.

Demonstr. Tire-se o raio CA: e teremos no triangulo ABC o angulo $ACD = ABC + CAB$ (76): mas he $ABC = CAB$, por ser $AC = BC$ (77); logo $ACD = 2.\ ABC$; donde $ABC = \frac{1}{2}\ ACD$: mas ACD tem por medida o arco AD; logo ABC, ou ABD terá por medida $\frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AD}$.

A respeito do que he formado por duas cordas; ou por huma corda, e huma tangente; facilmente se demonstrará, tirando pelo vertice hum diametro; com o que fica o angulo proposto somma, ou differença de dous angulos, de cada hum dos quaes se sabe que a medida he a metade do arco intercepto pelos seus lados: e por tanto vem a ser a medida do angulo proposto a semi-somma, ou a semi-differença desses arcos, isto he, a metade do arco intercepto pelos lados do dito angulo, *fig.* 48.

2.° Seja agora, *fig.* 49, o angulo ABD, que tem o vertice dentro do circulo: prolonguem-se os seus lados do vertice até en-

encontrarem a circunferencia nos pontos E, e F: digo que ABD tem por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD} + \frac{1}{2}\ \widehat{EF}$.

Demonstr. Tire-se a corda ED; e teremos no triangulo BED o angulo $ABD = AED + BDE$: mas o angulo AED tem por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD}$; e o angulo BDE, $\frac{1}{2}\ \widehat{EF}$; logo ABD terá por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD} + \frac{1}{2}\ \widehat{EF}$.

3.° Seja finalmente, *fig.* 50, o angulo ABD, que tem o vertice fóra do circulo: este ou he formado por duas secantes; ou por huma secante, e huma tangente; ou por duas tangentes. Seja por duas secantes: digo que ABD tem por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD} - \frac{1}{2}\ \widehat{EF}$.

Demonstr. Tire-se a corda ED; e teremos no triangulo BED o angulo $AED = ABD + BDE$; donde $ABD = AED - BDE$: mas o angulo AED tem por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD}$; e o angulo BDE $\frac{1}{2}\ \widehat{EF}$; logo ABD terá por medida $\frac{1}{2}\ \widehat{AD} - \frac{1}{2}\ \widehat{EF}$.

A respeito do que he formado por huma secante, e huma tangente, ou por duas

duas tangentes; demonstra-se da mesma maneira.

82. *Coroll.* 1.° São pois iguaes todos os angulos, que tendo o vertice na circunferencia, interceptão os seus lados o mesmo arco, ou arcos iguaes.

83. *Coroll.* 2.° He recto o angulo, que tendo o vertice na circunferencia, passão seus lados pelos extremos do diametro.

84. *Schol.* „ Na primeira parte deste Theorema se deve tambem entender o angulo *DBE*, *fig.* 51, em que „ hum dos lados, em vez de ser a corda *AB*, he o seu prolongamento *BE*. „ E com effeito este angulo tem por medida metade do arco *ABD* intercepto „ pelos seus lados; isto he, $\frac{1}{2}$ *AFB* + „ $\frac{1}{2}$ *BGD*: por quanto tirando a corda „ *AD*, he o angulo *DBE* = *ADB* + „ *DAB* (76), que respectivamente tem „ por medida $\frac{1}{2}$ *AFB*, e $\frac{1}{2}$ *BGD*. „

85. PROBL. *Levantar huma perpendicular ao extremo de huma recta, a qual do dito extremo se não póde continuar.*

Seja, *fig.* 52, *AB*, a recta; e *B*, o extremo. So-

Solução. Tome-se fóra da dita recta hum ponto *C*, tal, que fazendo nelle centro, e com o raio *CB* descrevendo a circunferencia *BEDB*, esta córte a recta *AB* em hum ponto *D*: tire-se por este, e pelo centro *C* o diametro *DE*; e do ponto *E*, onde este encontra a circunferencia, dirija-se ao ponto *B* a recta *EB*: digo que *EB* he a perpendicular pedida (83).

86. PROBL. *De hum ponto, dado fóra de hum circulo, tirar huma tangente á circunferencia desse circulo.*

Seja, *fig.* 53, *ABDA* a circunferencia do circulo; e *E* o ponto.

Solução. Por elle, e pelo centro *C* do circulo, se tire a recta *EC*; e sobre esta, como diametro, se descreva a circunferencia *AEBA*; a qual cortará a primeira nos pontos *A*, e *B*: por cada hum destes, e pelo ponto *E*, tirem-se as rectas *AE*, e *BE*: digo que qualquer destas duas rectas satisfaz á questão.

Demonstr. Tirem-se os raios *CA*, e *CB*: será cada hum dos angulos *CAE*, e *CBE*, recto (83); e por tanto *AE* perpendicular ao extremo do raio *CA*;

e

e *BE*, ao extremo do raio *CB* (20). Logo *AE*, e *BE* são tangentes á circunferencia *ABDA*; a saber: *AE* no ponto *A*, e *BE* no ponto *B* (48). Logo qualquer dellas resolve o Problema.

Da igualdade dos triangulos.

87. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum iguaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e iguaes os angulos formados por esses dous lados em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão iguaes.*

Sejão, *fig.* 54, os triangulos *ABC*, e *abc*; e seja $AB = ab$; $BC = bc$; e o angulo $B =$ o angulo b: digo que o triangulo *ABC* he igual ao triangulo *abc*.

Demonstr. Imagine-se applicado o ponto *B* no ponto *b*; e que, sobrepostos os planos, se ajusta o lado *BA* sobre o lado *ba*: o ponto *A* cahirá em *a*, por ser $BA = ba$ por hypothese; e o lado *BC* se ajustará sobre o lado *bc*, por ser o angulo $B =$ o angulo b por hypothese; e o ponto *C* cahirá em *c*, por ser $BC = bc$ tambem por hypothese. Logo tambem

bem o lado *AC* se ajustará sobre o lado *ac*; e lhe será igual, pois tem os mesmos extremos: por conseguinte cobrirá exactamente o angulo *A* o angulo *a*; o angulo *C* o angulo *c*; e a área *ABCA* a área *abca*. Logo os dous triangulos se ajustão perfeitamente; e por tanto são iguaes.

88. *Coroll.* He pois inteiramente determinado hum triangulo, todas as vezes que se dão dous dos seus lados com o angulo formado por elles.

89. *Advert.* Convem observar (e o mesmo succede nas tres seguintes proposições) que aos lados iguaes, isto he, aquelles, que se fazem ajustar, sobrepondo dous triangulos iguaes, ficão oppostos os angulos, que são respectivamente iguaes. Assim ao lado *AB* = ao lado *ab*, fica opposto o angulo *C* = o angulo *c*.

90. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous angulos de hum iguaes a dous angulos do outro, cada hum a cada hum; e for hum lado do primeiro igual a hum lado do segundo; os dous triangulos serão iguaes.*

Sejão, *fig.* 54, os triangulos *ABC*, e *abc*;

abc; e seja o angulo *A* = o angulo *a*; o angulo *C* = o angulo *c*; e o lado *AB* = o lado *ab*: digo que o triangulo *ABC* he igual ao triangulo *abc*.

Demonstr. Se os triangulos não são iguaes, sendo *AB* = *ab*, e o angulo *A* = o angulo *a*, segundo a hypothese; não será *AC* = *ac*; porque, sendo, está demonstrada a igualdade dos dous triangulos pelo Theorema precedente. Seja pois *AC* > *ac*: corte-se *AD* = *ac*; e tire-se *BD*: será o triangulo *ABD* igual ao triangulo *abc* (87); e por tanto o angulo *ABD* = o angulo *abc* (89): mas o angulo *ABC* he = o angulo *abc*, por serem os dous *A*, e *C* iguaes aos dous *a*, e *c*, segundo a hypothese (74); logo tambem o angulo *ABD* = o angulo *ABC*: o que evidentemente he absurdo. Logo não póde *AC* deixar de ser = *ac*; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos são iguaes (87).

91. *Coroll.* He pois inteiramente determinado hum triangulo, todas as vezes que se dão dous dos seus angulos com hum lado opposto, ou adjacente a hum dos ditos angulos.

92. THEOR. *Se, em dous triangulos,*

los, forem os tres lados de hum iguaes aos tres lados do outro, cada hum a cada hum; os dous triangulos serão iguaes.

Sejão, *fig.* 55, os triangulos *ABC*, e *abc*; e seja $AB = ab$; $BC = bc$; e $AC = ac$: digo que o triangulo *ABC* he igual ao triangulo *abc*.

Demonstr. Se os triangulos não são iguaes, sendo $AB = ab$, e $AC = ac$, segundo a hypothese; não será o angulo $BAC =$ o angulo *bac*; porque, sendo, está demonstrada a igualdade dos triangulos (87). Seja pois $BAC > a$; e delle se corte o angulo $BAD = a$: tome-se $AD = AC$; e tirem-se *BD*, e *DC*: será o triangulo *ABD* igual ao triangulo *abc*; e por tanto $BD = bc = BC$: logo se ao meio de *DC* levantarmos huma perpendicular; esta passará tanto pelo ponto *A*, como pelo ponto *B* (30): porém isto he absurdo (22); logo não póde o angulo *BAC* deixar de ser = o angulo *a*; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos são iguaes (87).

Se o ponto *D* cahisse em *BC*, o absurdo seria logo manifesto.

93. *Coroll.* He pois inteiramente de-

ter

terminado hum triangulo, todas as vezes que se dão os seus tres lados.

94. *Schol.* « Ao contrario; se tendo » os dous triangulos *ABC*, e *ABD* os » dous lados iguaes aos dous lados, cada » hum a cada hum, fosse o angulo *BAC*, » formado por aquelles dous lados no primeiro, maior que o angulo *BAD*, formado por estes dous no segundo; seria o terceiro lado *BC*, que he opposto ao maior angulo, maior que o terceiro lado *BD*, que he opposto ao menor angulo: e reciprocamente. Por » quanto a não ser maior; seria igual, » ou menor: sendo igual, as perpendiculares abaixadas dos pontos *A*, e *B* » sobre a recta *DC*, concorrerião no meio » della; e sendo menor, necessariamente se cortarião (26): o que he absurdo em ambos os casos (22, e 28). »

Quanto á reciproca; segue-se desta, e da proposição *n.*° 87.

95. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum iguaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e o angulo opposto ao maior desses lados tambem igual em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão iguaes.*

Se-

Sejão, *fig.* 55, os triangulos *ABC*, e *abc*; e seja $AB = ab$; $AC = ac$, sendo $AC > AB$; e seja o angulo $ABC =$ o angulo *abc*: digo que o triangulo *ABC* he igual ao triangulo *abc*.

Demonstr. Se os triangulos não sáo iguaes, sendo $AB = ab$, e $AC = ac$, segundo a hypothese; não será o angulo $BAC =$ o angulo *bac*; porque, sendo, está demonstrada a igualdade dos triangulos (87). Seja pois $BAC > a$; e delle se córte o angulo $BAD = a$: tome-se $AD = AC$; e o ponto *D* não cahirá em *BC* (29): tire-se *BD*: será o triangulo *ABD* igual ao triangulo *abc*; e por tanto o angulo *ABD* = o angulo *b*: mas he tambem, por hypothese, o angulo $ABC = b$; logo será o angulo $ABD =$ o angulo *ABC*: o que he manifesto absurdo. Logo não póde o angulo *BAC* deixar de ser $= a$; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos sáo iguaes (87).

96. *Coroll.* He pois inteiramente determinado hum triangulo, todas as vezes que se dáo dous dos seus lados com o angulo opposto ao maior delles.

97. *Schol.* « Póde tambem hum trian-
» gulo ser, ou não ser igual a outro trian-
» gu-

» gulo, se dous lados de hum forem iguaes
» a dous lados do outro, cada hum a
» cada hum, e o angulo opposto ao me-
» nor desses lados, tambem igual em
» cada hum dos triangulos. Por exemplo,
» *fig.* 58, os triangulos *BEF*, e *BEG*,
» tem o lado *BE* commum, e o angu-
» lo *B*, opposto ao menor lado, tam-
» bem commum; e póde ser $EF = EG$;
» e com tudo os dous triangulos são evi-
» dentemente desiguaes. Pelo que fica
» indeterminado hum triangulo, todas as
» vezes que se dão dous dos seus lados
» com o angulo opposto ao menor del-
» les; se o dito menor lado, com tudo,
» não for igual á perpendicular, que do
» vertice do angulo, opposto ao terceiro
» lado, sobre elle se abaixar; porque
» então nesse caso seria determinado:
» mas he necessario, que não seja me-
» nor, para que possa existir triangu-
» lo.»

98. THEOR. *Se duas rectas parallelas se cortarem com outras duas parallelas; as partes interceptas serão iguaes entre si.*

Sejão, *fig.* 56, as parallelas *EF*, e *GH*,

GH, cortadas pelas parallelas LM, e NO: digo que $AB = CD$, e $AC = BD$.

Demonstr. Tire-se a recta AD; e teremos os dous triangulos ABD, e ACD, os quaes tem hum lado commum adjacente a angulos iguaes, cada hum a cada hum; isto he, $DAB = ADC$, por ser AD secante a respeito das parallelas AB, e CD; e $CAD = ADB$, por ser tambem AD secante a respeito das parallelas AC, e BD (61): logo os dous triangulos são iguaes (90); e por tanto $AB = CD$; e $AC = BD$ (89).

99. *Coroll.* Logo se aos extremos correspondentes de duas rectas AB, e CD parallelas, e iguaes, se tirarem outras duas rectas AC, e BD; serão estas duas rectas AC, e BD parallelas entre si, e consequentemente iguaes. Porque huma vez que não fosse AC parallela a BD, tirar-se-hia pelo ponto A huma que o fosse; e então cortando a CD em hum outro ponto, daria huma parte $= AB = CD$, e ao mesmo tempo $>$ ou $< CD$; o que he absurdo.

100. PROBL. *Construir hum triangulo, que tenha dous lados iguaes a duas re-*

rectas dadas, cada hum a cada huma; sendo o angulo por elles formado igual a hum angulo dado.

Sejão, *fig.* 57, *ab*, e *cd*, as rectas dadas; e *A*, denote o angulo.

Solução. Tire-se huma recta indefinida *BC*; e no extremo *B* faça-se o angulo $CBD = A$: tome-se em *BC* huma parte *BF* igual a huma das rectas dadas, por ex., *ab*; e em *BD*, a parte *BE* igual á outra recta dada *cd*: tire-se pelos pontos *E*, e *F* a recta *EF*: digo que o triangulo construido *BEF* satisfaz ás condições do Problema (88).

101. PROBL. *Construir hum triangulo, que tenha dous angulos iguaes a dous angulos dados, cada hum a cada hum, e a somma* $< 180°$; *sendo o lado, adjacente a estes angulos, igual a huma recta dada.*

Seja, *fig.* 57, *ab* a recta dada; e *A*, e *B*, denotem os angulos.

Solução. Tire-se huma recta indefinida *BC*; e tomando $BF = ab$, faça-se no extremo *B* o angulo *FBD* igual a hum dos angulos dados, por ex., *B*; e no ponto

to F, o angulo BFE igual ao outro angulo dado A; cujo lado FE encontrará BD em hum ponto E: digo que o triangulo construido BEF satisfaz ás condições do Problema (91).

102. PROBL. *Construir hum triangulo, que tenha tres lados iguaes a tres rectas dadas, cada hum a cada huma; sendo a somma de quaesquer duas maior do que a terceira.*

Sejão, *fig.* 57, ab, cd, ef, as rectas dadas.

Solução. Tire-se huma recta indefinida BC; e tome-se huma parte BF igual a huma das rectas dadas, por ex., ab: fazendo centro em B, e com hum raio igual a huma das outras, por ex., cd, se descreva hum arco de circulo; e fazendo centro em F, e com hum raio igual á terceira ef, se descreva outro arco, o qual cortará o primeiro em hum ponto E: tirem-se deste para os pontos F, e B as rectas EF, e EB: digo que o triangulo construido BEF satisfaz ás condições do Problema (93).

103. PROBL. *Construir hum triangu-*

lo, que tenha dous lados iguaes a duas rectas dadas, cada hum a cada huma; sendo o angulo opposto ao maior destes lados, igual a hum angulo dado.

Sejão, *fig.* 57, *ef*, e *cd*, as rectas dadas; *A*, denote o angulo; e seja $ef > cd$.

Solução. Tire-se huma recta indefinida *BC*; e no extremo *B* faça-se o angulo $CBD = A$: tome-se em *BD* a parte $BE = cd$; e descreva-se do ponto *E*, como centro, e com hum raio igual a *ef*, hum arco de circulo, que cortará *BC* em hum ponto *F*: tire-se por esse ponto, e pelo ponto *E*, a recta *EF*: digo que o triangulo construido *BEF* satisfaz ás condições do Problema (96).

104. PROBL. *Construir dous triangulos differentes, que tenhão dous lados iguaes a duas rectas dadas, cada hum a cada huma; sendo o angulo opposto ao menor destes lados, igual a hum angulo dado; e o dito menor lado, maior que a perpendicular, que do vertice do angulo, opposto ao terceiro lado, sobre elle se abaixar.*

Sejão, *fig.* 57, *ab*, e *cd*, as rectas da-

dadas; A, denote o angulo; e seja $ab > cd$.

Solução. Tire-se, *fig.* 58, huma recta indefinida BC; e no extremo B faça-se o angulo $CBD = A$: tome-se em BD a parte $BE = ab$; e descreva-se do ponto E, como centro, e com hum raio igual a cd, hum arco de circulo, que cortará BC em dous pontos F, e G (27): tirem-se delles para o ponto E as rectas FE, e GE: digo que os dous triangulos construidos BEF, e BEG, satisfazem ambos ás condições do Problema (97).

Das linhas proporcionaes.

105. Dadas quatro linhas 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª; se a primeira for para a segunda, como a terceira he para a quarta; as ditas quatro linhas serão proporcionaes entre si.

Porém se a primeira for para a segunda, como a quarta he para a terceira; então as duas primeiras serão reciprocamente proporcionaes ás outras duas. Em fim duas linhas são reciprocamente proporcionaes a duas outras, quando estas duas occupão o lugar de meios, ou

de extremos, em huma proporção, em que as outras duas são os extremos, ou os meios.

Se de tres linhas for a primeira para a segunda, como a segunda he para a terceira; ter-se-ha huma proporção contínua: a segunda linha he meia proporcional; e chama-se terceira proporcional o quarto termo desta proporção, isto he, a terceira linha.

Esta proporção se tornará em huma progressão, todas as vezes que a primeira linha for para a segunda, como a segunda he para a terceira, como a terceira he para huma quarta, e assim successivamente.

Em geral todas as propriedades, que na Arithmetica se demonstrarão sobre a proporcionalidade dos numeros, convem ás linhas, que estiverem em proporção. Advertimos porém, que só tratamos aqui das proporções geometricas; e he esta dos Elementos de Geometria a parte mais essencial.

106. THEOR. *Se sobre hum dos lados de hum angulo, começando, por ex., do vertice, se marcarem, quantas partes iguaes quizermos, e da grandeza, que*

que quizermos; e depois conduzindo por hum dos pontos dessa divisão huma recta qualquer, até encontrar o segundo lado, se tirarem pelos outros pontos da divisão parallelas a essa recta; o dito segundo lado ficará tambem dividido em outras tantas partes, iguaes entre si.

Seja, *fig.* 59, o angulo BAC; e sobre hum dos seus lados, por ex., AB, se marquem, a arbitrio, as partes iguaes AD, DG, GI, &c.: tire-se por hum dos pontos P da divisão huma recta PQ, e pelos outros pontos, parallelas a PQ, as rectas DF, GH, IK, &c.: digo que o lado AC ficará tambem cortado em tantas partes iguaes entre si, quantas são aquellas, em que foi dividido o lado AB; isto he, $AF = FH = HK =$ &c.

Demonstr. Pelos pontos D, G, I, &c. tirem-se parallelamente a AC as rectas DE, GR, IS, &c.; e serão os triangulos DAF, GDE, IGR, &c., iguaes entre si, por ser $AD = DG = GI =$ &c. por construcção; e por serem iguaes os angulos, a que estão adjacentes estes lados, cada hum ao seu (90); isto he, $DAF = GDE = IGR =$ &c.; e $FDA = EGD = RIG =$ &c. (60). Logo se-

será $AF = DE = GR =$ &c., ou $AF = FH = HK =$ &c.; pois he $DE = FH$; $GR = HK$; &c. (98).

107. *Coroll.* Será por tanto $AD : DG : GI :$ &c $:: AF : FH : HK :$ &c.; e por consequencia AP (somma de todos os antecedentes) : AQ (somma de todos os consequentes) $::$ AD (hum só antecedente) : AF (seu consequente); ou como hum numero qualquer daquellas partes de AB para o mesmo numero d'estoutras partes de AC; por ex. $::$ $AG : AH :: AI : AK :: DN : FO ::$ &c.

108. THEOR. *Se em hum triangulo forem quaesquer dous lados cortados por huma recta parallela ao terceiro; serão os ditos dous lados cortados proporcionalmente; isto he, será hum lado para o outro lado, como qualquer parte do primeiro para a parte correspondente do segundo. E não serão assim cortados, se a recta, que os dividir, não for parallela ao terceiro.*

1.° Seja, *fig.* 60, o triangulo ABC; e cortem-se dous lados AB, e AC por qualquer recta DE parallela ao terceiro BC: digo que $AB : AC :: AD : AE :: DB : EC$.

De-

Demonstr. Porque se não está $AB : AC :: AD : AE$; estará como AD para huma parte $X >$ ou $< AE$. Esteja $:: AB : X > AE$; isto he $:: AD : Ar$. Conceba-se dividido o lado AC em tantas partes iguaes, quantas forem precisas, para que hum dos pontos da divisão caia entre E, e r; por ex., em i; e tire-se in parallela a BC: teremos $AB : AC :: An : Ai$ (107): mas tambem suppozemos $AB : AC :: AD : Ar$; logo $An : AD :: Ai : Ar$: mas $An > AD$; logo tambem $Ai > Ar$: o que evidentemente he absurdo. Esteja pois $:: AD : X < AE$, isto he $:: AD : Ar'$. Conceba-se então dividido o lado AC em tantas partes iguaes, quantas forem precisas, para que hum dos pontos da divisão caia entre E, e r'; por ex., em i'; e tire-se $i'n'$ parallela a BC: teremos da mesma fórma $AB : AC :: An' : Ai'$: mas tambem suppozemos $AB : AC :: AD : Ar'$; logo $An' : AD :: Ai' : Ar'$: mas $An' < AD$; logo tambem $Ai' < Ar'$; o que evidentemente he absurdo. E pois não está $AB : AC : AD : X >$ ou $< AE$; estará $:: AD : AE$: e por tanto tambem $AB - AD$, ou $DB : AC - AE$, ou $EC :: AB : AC$; isto he, $AB : AC :: AD : AE :: DB : EC$.

2.°

2.° Sejão porém, *fig.* 61, os lados *AB*, e *AC* do triangulo *ABC* cortados por qualquer recta *DE* não parallela a *BC*: digo que não será *AB*: *AC*:: *AD*: *AE*.

Demonstr. Porque se he possivel ser *AB*: *AC*:: *AD*: *AE*; tirando-se pelo ponto *D* a recta *DF* parallela a *BC*, será tambem pelo que acabamos de demonstrar, *AB*: *AC*:: *AD*: *AF*; e por tanto *AF* = *AE*: o que evidentemente he absurdo. Logo não he *AB*: *AC*:: *AD*: *AE*.

109. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se dous lados de hum triangulo forem cortados proporcionalmente; a recta, que os cortar, será parallela ao terceiro. E não será, se assim os não cortar.

Coroll. 2.° Todas as rectas, *fig.* 62, *AB*, *AD*, *AE*, *AF*, &c., que de hum mesmo ponto *A*, tomado fóra de huma recta *BC*, se tirarem para differentes pontos da mesma, serão cortadas proporcionalmente por qualquer outra *GH*, parallela a *BC*. E reciprocamente: se quaesquer rectas *AB*, *AD*, &c., tiradas de hum mesmo ponto *A*, fóra de huma recta *BC*, forem cortadas proporcionalmente nos pontos *G*, *I*,

I, *L*, *H*, &c.; a linha, que passar por estes pontos, será huma recta, e parallela a *BC*. Porque considerando successivamente os triangulos *BAD*, *BAE*, *BAF*, &c., teremos

1.° *AB* : *AD* : : *AG* : *AI* : : *GB* : *ID*.
2.° *AB* : *AE* : : *AG* : *AL* : : *GB* : *LE*.
3.° *AB* : *AF* : : *AG* : *AH* : : *GB* : *HF*;

e consequentemente

AB : *AD* : *AE* : *AF* : : *AG* : *AI* : *AL* : *AH* : : *GB* : *ID* : *LE* : *HF*.

Quanto á reciproca; he tambem consequencia que no triangulo *BAD* he *GI* parallela a *BD*; no triangulo *BAE* he *GL* parallela a *BE*; e assim nos mais; ou *GI*, *GL*, &c. parallelas a *BC*: pelo que, e porque partem todas do mesmo ponto *G*, necessariamente devem fazer a mesma recta *GH* parallela a *BC* (58).

III. *Schol.* « Ainda quando a recta » *GH*, parallela a *BC*, estivesse por cima do ponto *A*, como na *fig.* 63; nem » por isso deixarião de ter lugar as propposições, que acabamos de estabelecer (108, e seguintes): por quanto » tudo o que dissemos na *fig.* 59, e que » lhe serve de base, tem igual applicação a respeito das parallelas, que cortarem as rectas *BA*, e *CA*, que for-

» mão

» mão o angulo *BAC*, continuadas do » vertice. »

112. THEOR. *Se huma recta dividir em duas partes iguaes hum dos angulos de hum triangulo; divirá o lado, que fica opposto ao dito angulo, em duas partes proporcionaes aos lados correspondentes.*

Seja, *fig.* 64, o triangulo *ABC*; e divida-se pela recta *AD* em duas partes iguaes o angulo *BAC*: digo que *BD* : *DC* : : *AB* : *AC*.

Demonstr. Tire-se pelo ponto *B* a recta *BE* parallela a *AD*, até que encontre em hum ponto *E* o lado *CA*, continuado: será o angulo *EBA* = o angulo *BAD* (61); e o angulo *BEA* = o angulo *DAC* (60); e por ser *BAD* = *DAC* por construcção, tambem *EBA* = *BEA*; e por isso *AE* = *AB* (78): ora temos que he *BD*: *AE* : : *DC*: *AC* (108); logo substituindo *AB* em lugar de *AE*, e alternando, virá *BD* : *DC*: : *AB* : *AC*.

Dos triangulos similhantes.

113. Duas figuras são *similhantes*, quan-

quando, tendo o mesmo numero de lados, são os angulos de huma respectivamente iguaes aos angulos da outra, e proporcionaes os lados, que em huma, e outra ficão adjacentes aos angulos iguaes; e que se chamão lados *homologos*.

Estas duas condições da similhança das figuras estão nos triangulos ligadas de tal maneira, que basta que huma dellas se verifique, para que se siga immediatamente a outra, e os triangulos sejão similhantes. Assim o veremos nos Theoremas seguintes.

114. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous angulos de hum iguaes a dous angulos do outro, cada hum a cada hum; e por consequencia o terceiro igual ao terceiro; os dous triangulos terão os lados homologos proporcionaes; e consequentemente serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 65, os triangulos ABC, e abc; e sejão os angulos $A = a$; $B = b$; e logo $C = c$: digo que $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$; e por consequencia o triangulo ABC similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Sobre qualquer lado de hum del-

delles, por ex., sobre o lado *AB* do triangulo *ABC*, continuado, se for necessario, tome-se huma parte *Ab'* igual ao lado *ab*, que lhe he homologo; e pelo ponto *b'* tire-se *b'c'* parallela a *BC*: será o triangulo *Ab'c'* igual ao triangulo *abc* (90); e por tanto *b'c'* = *bc*. Tire-se por *c'* a recta *c'd* parallela a *AB*: será *Bd* = *b'c'* (98). Isto posto, como, por ser *b'c'* parallela a *BC*, he *AB*: *Ab'* :: *AC*: *Ac'* (108); e da mesma fórma *AC*: *Ac'* :: *BC*: *Bd*, ou *b'c'*, por ser *c'd* parallela a *AB*; será *AB*: *Ab'*, ou *ab* :: *AC*: *Ac'*, ou *ac* :: *BC*: *b'c'*, ou *bc*. Logo os dous triangulos *ABC*, e *abc*, cujos angulos são respectivamente iguaes, tem os lados homologos proporcionaes; e por tanto são similhantes.

115. *Coroll.* 1.° Logo se em qualquer triangulo rectangulo *ABC*, *fig.* 66, se abaixar do vertice *A* do angulo recto huma perpendicular *AD* sobre a hypothenusa *BC*; esta perpendicular dividirá o triangulo em outros dous *ABD*, e *ADC*, similhantes ao total, e por conseguinte entre si: e por isso será a dita perpendicular meia proporcional entre os segmentos da hypothenusa: e cada hum dos lados do angulo recto,

meia

meia proporcional entre a hypothenusa, e o segmento correspondente. Com effeito o triangulo *ABD*, e o total *ABC*, são ambos rectangulos, e tem hum angulo commum em *B*: e da mesma sorte ambos rectangulos, e com hum angulo commum em *C*, o triangulo *ADC*, e o total *ABC*. Logo os dous *ABD*, e *ADC* são similhantes ao dito *ABC*, e por conseguinte similhantes entre si. Logo comparando os lados homologos dos triangulos parciaes, e depois successivamente os de cada hum destes com os homologos do total; observando que he o angulo $BAD = C$, e $DAC = B$; resultará

$BD : AD :: AD : DC$; $BC : AB :: AB : BD$; e $BC : AC :: AC : DC$.

116. *Coroll.* 2.° São tambem similhantes dous triangulos.

1.° Quando tem os lados parallelos.

2.° Quando os lados de hum são perpendiculares aos lados do outro; ou o são, continuados. Porque, em ambos os casos, os angulos dos dous triangulos são respectivamente iguaes (63, e 64).

117. *Coroll.* 3.° Quaesquer rectas, *fig.* 62, *AB*, *AD*, *AE*, &c., que de hum

hum mesmo ponto *A*, tomado fóra de huma recta *BC*, se tirarem para differentes pontos da mesma, cortaráõ qualquer outra *GH*, parallela a *BC*, em partes taes, que terão entre si a mesma razão, que tem as partes correspondentes de *BC*; isto he, será *BD*: *GI* :: *DE*: *IL* :: *EF*: *LH* :: &c. Porque os triangulos *ABD*, *ADE*, *AEF*, &c., são similhantes aos triangulos *AGI*, *AIL*, *ALH*, &c., cada hum a cada hum; e por isso *BD*: *GI*: : *AD*: *AI* :: *DE*: *IL*:: *AE*: *AL*:: *EF*: *LH*:: &c.: e tirando desta serie de razões iguaes aquellas, em que entrão as partes das linhas *BF*, e *GH*, virá *BD*: *GI*:: *DE*: *IL*:: *EF*: *LH*:: &c.

118. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum proporcionaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e iguaes os angulos formados por esses dous lados em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 67, os triangulos *ABC*, e *abc*; e seja *AB*: *ab* :: *AC*: *ac*; e o angu-

gulo $A =$ o angulo a: digo que o triangulo ABC he similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Se os triangulos não são similhantes, sendo $A = a$; não será o angulo $ABC =$ o angulo b; porque, sendo, está demonstrada a similhança dos triangulos pelo Theorema precedente. Seja pois $ABC > b$; e delle se corte o angulo $ABD = b$: será o triangulo BAD similhante ao triangulo bac (114); e por tanto $AB : ab :: AD : ac$: mas tambem, por hypothese, $AB : ab :: AC : ac$; logo $AD : ac :: AC : ac$; e por isso $AD = AC$: o que evidentemente he absurdo. Logo não póde o angulo ABC deixar de ser $= b$; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos são similhantes (114).

119. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem os tres lados de hum proporcionaes aos tres lados do outro, cada hum a cada hum; os dous triangulos serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 68, os triangulos ABC, e abc; e seja $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$: digo que o triangulo ABC he similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Se os triangulos não são si-

similhantes, sendo $AB : ab :: AC : ac$; não será o angulo $BAC =$ o angulo a; porque, sendo, está demonstrada a similhança dos triangulos pelo Theorema precedente. Seja pois $BAC > a$; e delle se corte o angulo $BAD = a$: tome-se $AD = AC$; e tire-se BD: será o triangulo ABD similhante ao triangulo abc (118); e por tanto $AB : ab :: BD : bc$: mas tambem, por hypothese, $AB : ab :: BC : bc$; logo $BD : bc :: BC : bc$; e por isso $BD = BC$: o que he absurdo, por quanto, sendo por construcção $AD = AC$, he $BD < BC$ (94). Logo não póde o angulo BAC deixar de ser $= a$; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos são similhantes (118).

120. THEOR. *Se, em dous triangulos, forem dous lados de hum proporcionaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum; e o angulo opposto ao maior desses lados, igual em cada hum dos triangulos; os dous triangulos serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 68, os triangulos ABC, e abc; e seja $AB : ab :: AC : ac$, sendo $AC > AB$; e seja o angulo $ABC =$ o

an-

angulo *abc* : digo que o triangulo *ABC* he similhante ao triangulo *abc*.

Demonstr. Se os triangulos não são similhantes, sendo *AB* : *ab* : : *AC*: *ac*; não será o angulo *BAC* = o angulo *a*; porque, sendo, está demonstrada a similhança dos triangulos (118). Seja pois *BAC* > *a*, e delle se corte o angulo *BAD* = *a*: tome-se *AD* = *AC*; e o ponto *D* não cahirá em *BC* (29): tire-se *BD*: será o triangulo *ABD* similhante ao triangulo *abc*; e por tanto o angulo *ABD* = o angulo *b* (113): mas he tambem, por hypothese, o angulo *ABC* = *b*; logo será o angulo *ABD* = o angulo *ABC*: o que he manifesto absurdo. Logo não póde o angulo *BAC* deixar de ser = *a*; e por tanto he demonstrado que os dous triangulos são similhantes.

121. *Schol.* « Póde tambem hum triangulo ser, ou não ser similhante a outro triangulo, se dous lados de hum forem proporcionaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum, e o angulo opposto ao menor desses lados, igual em cada hum dos triangulos. E assim deve ser, para que se satisfaça ao *n.*° 97. »

122. PROBL. *Dividir huma recta dada em partes taes, que tenhão entre si certas razões dadas.*

Seja, *fig.* 69, *AB* a recta, que se quer dividir, por ex., em tres partes, que estejão entre si, como 4 : 3 : 2.

Solução. Tire-se pelo ponto *A* huma recta qualquer *AZ*, indefinida; e sommando os termos dados 4, 3, 2, marquem-se nella igual numero de partes iguaes, a saber, 9, neste caso, da grandeza, que quizermos, *AC*, *CD*, *DE*, &c.: tire-se pelo ponto *B*, e pelo ultimo *M* da divisão, a recta *BM*; e pelos pontos *I* (o 7.°), e *F* (o 4.°), as rectas *IO*, e *FN* parallelas a *BM*: digo que *AB* está dividida nos pontos *N*, e *O*, em tres partes *AN*, *NO*, *OB*, como se pedia; isto he, *AN* : *NO* : *OB* : : 4 : 3 : 2 (106).

Vê-se pois o que se faria, se se quizesse dividir a recta dada em hum certo numero de partes iguaes.

Se aquellas razões, em vez de serem expressas por numeros, se dessem em linhas; marcar-se-hião successivamente as suas grandezas sobre a indefinida *AZ*, tomando, por ex., de *A* para *Z* huma grandeza *AF* = 1.ª; de *F* para a mesma

ma parte, huma grandeza $FI = 2.^a$; e finalmente de I para Z huma grandeza $IM = 3.^a$: então as rectas MB, IO, e FN, que pelos pontos M, I, e F se tirassem, como acima fizemos, dividirião a linha dada na maneira pedida.

123. *Schol.* 1.° "Quando as partes "da linha, que se pretende dividir, de- "vem ser muito pequenas, ou he mes- "mo muito pequena a dita linha; o mais "leve defeito no tirar as parallelas, in- "fluiria muito sobre a igualdade, ou "desigualdade das partes: he por isso "que então procederemos da maneira "seguinte."

Seja, *fig.* 70, ab a recta, que se quer dividir, por ex., em seis partes iguaes. Construa-se sobre ella o triangulo equilatero aCb, descrevendo dos pontos a, e b, como centros, e com hum raio igual a ab, dous arcos de circulo, que se cortaráõ em hum ponto C, &c. Sobre Ca, prolongado indefinidamente, marquem-se seis partes iguaes da grandeza, que quizermos; e seja CA a linha, que contém essas seis partes: tome-se sobre Cb, tambem prolongado, a parte $CB = CA$; e tire-se AB: será AB parallela a ab; porque sendo $CA = CB$, e $Ca = Cb$, he

$CA : CB :: Ca : Cb$ (109). Faça-se pois centro em A, e com os raios AD, AE, AF, &c., se descrevão arcos, que cortaráõ AB em outras tantas partes iguaes: do ponto C dirijão-se rectas aos pontos da divisão de AB: estas rectas cortaráõ ab do mesmo modo que se tem cortado AB; isto he, em seis partes iguaes (117).

124. *Schol.* 2.° "A divisão das rectas "em partes iguaes he o fundamento da "construcção das *Escallas*, que servem "de reduzir huma figura de grande a "pequena. A mais commoda de todas "em hum grande numero de operações "he, a que se chama *Escalla de dizi-*"*ma*. Eis-aqui a sua construcção."

Nas extremidades A, e B da linha AB, *fig.* 71, que se pretende dividir em 100 partes iguaes, levantem-se as perpendiculares AC, e BD, sobre cada huma das quaes se marquem 10 partes iguaes da grandeza, que quizermos: tire-se então CD; e dividindo AB em 10 partes iguaes, marquem-se estas sobre CD. Isto feito, conduzão-se as transversaes, como se vê da figura; e tirem-se rectas pelos pontos correspondentes da divisão de AC, e BD, que serão outras tantas parallelas a AB. Não obstante pois AB estar só di-

dividida em 10 partes iguaes, com tudo querendo tomar-se hum numero qualquer das 100, em que ella póde ser cortada, por ex., buscando-se 47 centesimas partes de *AB*; eu tomo sobre a recta tirada pela 7.ª divisão a parte $7H$, que vai desde *CA* até a transversal, que passa pelo *n.°* 40; e será $7H = 0,47.\ AB$. Com effeito os triangulos similhantes $C7v$, e CAx, dão $CA : C7 :: Ax : 7v$; isto he, $10 : 7 :: \frac{1}{10} AB : 7v = \frac{7}{100} AB$. Ora $vH = 0,40\ AB$; logo $7v + vH$, ou $7H = 0,47\ AB$.

125. PROBL. *Achar huma quarta proporcional a tres rectas dadas.*

Sejão, *fig.* 72, *ab*, *cd*, *ef*, as rectas dadas.

Solução. Tirem-se, *fig.* 69, duas linhas indefinidas *AZ*, e *AB*, que fação hum angulo qualquer; e tome-se sobre *AZ* de *A* para *Z* huma parte $AF = ab$, e huma parte $AI = cd$; e da mesma fórma sobre *AB* de *A* para *B* huma parte $AN = ef$: tire-se *FN*, e parallelamente a *FN* pelo ponto *I* se conduza *IO* até encontrar *AB*: digo que *AO* he a quarta proporcional pedida.

De-

Demonstr. Com effeito AF, ou ab : AI, ou cd : : AN, ou ef : AO.

Este mesmo Problema se póde resolver d'estoutra maneira.

Depois de haver tomado sobre a linha indefinida AZ huma parte $AF = ab$, e huma parte $AI = cd$; tire-se pelo ponto F huma outra qualquer Fn indefinidamente, sobre a qual se corte a parte $Fn = ef$; e tire-se a recta Anb; e pelo ponto I a recta Io parallela a FN: será esta Io a quarta proporcional. Por quanto AF, ou ab : AI, ou cd : : Fn, ou ef : Io.

126. *Schol.* « Sem differença alguma » do que acabamos de praticar, acharemos huma terceira proporcional a duas » rectas dadas; observando que esta he » o quarto termo de huma proporção, » em que a segunda das duas linhas dadas he consequente na primeira razão, » e antecedente na segunda. »

Das linhas proporcionaes consideradas no circulo.

127. THEOR. *Se duas cordas se cortarem em hum circulo; cortar-se-hão em razão reciproca; isto he, serão os segmen-*

gmentos de huma reciprocamente proporcionaes aos segmentos da outra.

Sejão, *fig.* 73, as cordas AB, e DE, que se cortão no ponto F: digo que $AF : EF :: DF : BF$.

Demonstr. Tirem-se as rectas AD, e BE: e teremos os triangulos AFD, e BFE similhantes, por serem os angulos $AFD = BFE$, e $EBF = ADF$ (81): logo será $AF : EF :: DF : BF$.

128. *Coroll.* Segue-se pois: que toda a perpendicular DF, *fig.* 74, que de hum ponto qualquer D da circunferencia de hum circulo se abaixar sobre o diametro, será meia proporcional entre os segmentos do dito diametro. Porque então he $DF = EF$ (38).

129. PROBL. *Achar huma meia-proporcional entre duas rectas dadas.*

Sejão, *fig.* 75, ab, e cd as rectas dadas.

Solução. Tire-se huma recta indefinida AZ: marquem-se nella de A para Z as partes $AF = ab$, e $FB = cd$: levante-se no ponto F huma perpendicular FD;

e sobre *AB*, como diametro, se descreva a semi-circunferencia *ADB*, a qual cortará em hum ponto *D* a perpendicular *FD*: digo que *DF* he a meia-proporcional pedida (128).

130. THEOR. *Se de hum mesmo ponto fóra de hum circulo se tirarem huma secante, que termine na parte concava da circunferencia, e huma tangente, que termine no ponto do contacto; será a tangente meia-proporcional entre a secante, e a parte exterior da mesma secante.*

Sejão, *fig.* 76, a tangente *AD*, e a secante *AB* tiradas do mesmo ponto *A* fóra do circulo *CBDEB*: digo que *AB*: *AD*:: *AD*: *AE*.

Demonstr. Tirem-se as rectas *BD*, e *DE*; e teremos os triangulos *ABD*, e *ADE* similhantes, por terem o angulo em *A* commum, e ser o angulo *ABD* = o angulo *ADE* (81): logo será *AB*: *AD*:: *AD*: *AE*.

131. *Coroll.* Por quanto tirando do mesmo ponto *A* qualquer outra secante *AG*, teremos da mesma sorte *AG*: *AD*:: *AD*: *AF*; e desta, e da pre-

ce-

cedente proporção resulta $\overline{AD}^2 = AG \times AF = AB \times AE$; donde $AG : AB :: AE : AF$; segue-se que duas secantes quaesquer, sendo tiradas de hum mesmo ponto fóra de hum circulo, e terminando na parte concava da circunferencia, serão reciprocamente proporcionaes ás suas partes exteriores.

53. PROBL. *Dividir huma recta dada em* media, e extrema razão.

(Assim se diz dividida huma recta, quando, sendo-o em duas partes desiguaes, he a maior meia proporcional entre a menor, e a dita recta.)

Seja, *fig.* 77, AB, a recta.

Solução. Em hum dos extremos, por ex., B, levante-se huma perpendicular, na qual se tome a parte $BC = \frac{1}{2} AB$; e fazendo centro em C, e com o raio BC, se descreva o circulo $CBEDB$: tire-se pelo ponto A, e pelo centro C, a recta ACD, que termine na parte concava da circunferencia em o ponto D; e por meio de hum arco descripto do ponto A, como centro, e com o raio AE, se corte AB em hum ponto F: digo que AB fica-

cará cortada em *media*, *e extrema razão.*

Demonstr. Com effeito, por ser *AD* secante, e *AB* tangente, pois *AB* he perpendicular a *CB* (48); e tiradas ambas do mesmo ponto *A* fóra do circulo; teremos *AD* : *AB* : : *AB* : *AE*; e consequentemente *AD* — *AB* : *AB* : : *AB* — *AE* : *AE*. Ora he *AB* = 2. *CD* por construcção, = *ED*; e he *AE* = *AF*, tambem por construcção; será *AD* — *AB* = *AF*; e *AB* — *AE* = *FB*; e logo por substituição, *AF* : *AB* : : *FB* : *AF*; ou *AB* : *AF* : : *AF* : *FB*.

Dos polygonos.

133. Chamão-se *polygonos* as figuras terminadas em hum plano por linhas rectas; cada huma das quaes se diz *lado* do polygono; e consideradas juntas, *perimetro*. Concorrendo duas a duas, ellas formão o polygono com tantos angulos, quantos são os seus lados. Se todos os lados são iguaes, e os angulos tambem iguaes; diz-se que o polygono he *regular*.

O mais simples de todos os polygonos he o que tem tres lados; e que

se

se nomea, como já dissemos, triangulo: tambem se diz *trilatero.*

Quando o polygono tem quatro lados, chama-se *quadrilatero*: cinco, *pentagono*: seis, *hexagono*: sete, *heptagono*: outo, *octogono*: nove, *enneagono*: dez, *decagono*: &c.

Em hum polygono se diz que hum angulo he *reintrante*, ou *saliente*, quando os lados do dito angulo, sendo continuados do vertice, podem, ou não, entrar dentro do polygono. Assim na *fig.* 78, o angulo *ABC* he *saliente*, e *DEF reintrante.*

A recta, que de hum angulo se tira para outro angulo em hum polygono, chama-se *diagonal.*

134. THEOR. *Se em qualquer polygono se tirarem diagonaes; a saber, de hum angulo para outro angulo, e que separe hum triangulo, e d'estoutro para outro, e assim successivamente; o polygono ficará dividido em tantos triangulo, quantos são os lados do dito polygono menos dous.*

Seja, *fig.* 79, o polygono *ABDFHGEC*; e tirem-se as diagonaes *BC*, *CD*, *DE*, *EF*

EF, *FG*; digo que o polygono fica dividido em tantos triangulos, quantos são os seus lados menos dous.

Demonstr. Porque: as duas diagonaes extremas *BC*, e *FG*, separão dous triangulos, em que entrão quatro lados do polygono; a saber, dous lados em cada hum; ficando comprehendidos entre os ditos triangulos outros tantos, quantos são os lados, que restão, do polygono, os quaes lados pertencem cada hum ao seu triangulo; de sorte que, se *n* denotar o numero dos lados do polygono, teremos pela primeira, e pela ultima diagonal dous triangulos; e pelo numero dos lados, que restão, $(n-4)$ triangulos; isto he, o numero total dos triangulos, em que fica dividido o polygono, será $(n-4)+2=n-2$. Logo &c.

135. *Coroll.* 1.° A somma dos valores de todos os angulos internos de qualquer polygono vale tantas vezes 180°, quantos são os seus lados menos dous. Porque he evidente que a somma dos ditos angulos he a mesma, que aquella de todos os angulos dos triangulos, em que está dividido o polygono: e pois os tres angulos de hum triangulo valem juntos 180°; lo-

go

go deve-se tomar tantas vezes 180°, quantos forem os ditos triangulos; isto he, (n — 2) 180°.

136. *Coroll.* 2.° Logo $\frac{(n-2)\,180^\circ}{n}$ he o valor de qualquer dos angulos de hum polygono regular.

137. *Schol.* « Para que, o que dissemos no *n.°* 135, se estenda a todos os polygonos; convem observar naquelles, que tem angulos reintrantes, como he, por ex., o angulo *FED* na *fig.* 78; que se não deve entender este, como interno do polygono; mas o que lhe falta para 360°; a saber, a somma dos angulos *FEA*, *AEB*, e *BED*. »

138. THEOR. *Se em qualquer polygono, que não tem angulo reintrante, se prolongarem todos os seus lados em o mesmo sentido; a somma de todos os angulos externos valerá sempre* 360°; *isto he, será a somma dos supplementos dos angulos internos do polygono* = 360°.

Seja, *fig.* 80, o polygono *ABCDE*; e prolonguem-se no mesmo sentido os lados *AB*, *BC*, *CD*, &c., como mostra

a figura: digo que a somma de todos os angulos externos, isto he, *FAB* + *GBC* + *HCD* + &c. = 360°

Demonstr. Por quanto a somma de cada hum angulo interno *BAE* do polygono com o seu externo *BAF* vale sempre 180° (19), valerá a somma de todos os angulos internos com a de todos os externos do polygono tantas vezes 180°, quantos forem os lados do mesmo polygono: mas a somma de todos os internos differe desta somma total em duas vezes 180°, ou 360° (135); logo a somma de todos os externos valerá os 360°. E vê-se que he a somma dos supplementos dos angulos internos do polygono.

139. THEOR. *Se por meio de linhas rectas se dividirem em duas partes iguaes todos os angulos de hum polygono regular; essas rectas concorrerão todas em hum mesmo ponto dentro do polygono; e o dividirão em tantos triangulos isosceles iguaes, quantos forem os lados do mesmo polygono.*

Seja, *fig.* 81, o polygono regular *ABDEFG*; e por meio das rectas *Aa*, *Bb*, *Dd*, &c., dividão-se em duas partes

tes iguaes os angulos *GAB*, *ABD*, *BDE*, &c., cada hum por cada huma: digo que estas rectas concorreráõ todas em hum mesmo ponto *C* dentro do polygono; e o dividiráõ em tantos triangulos isosceles iguaes, quantos são os lados do mesmo polygono.

Demonstr. Pois o angulo *GAB* he = *ABD* (133); e cada hum delles < 180°; as suas metades *aAB*, e *ABb* tambem serão iguaes, e cada huma < 90°: pelo que as rectas *Aa*, e *Bb* concorreráõ em hum ponto *C* (59); e farão o triangulo *ACB* isosceles (78): da mesma sorte se mostrará que tambem *Bb*, e *Dd* concorreráõ, e farão outro triangulo isosceles, e assim os mais; e por tanto ficaráõ formados tantos triangulos isosceles, quantos são os lados do polygono. Mas cada hum destes triangulos tem respectivamente hum lado igual a hum lado, que são os lados do polygono, adjacentes a angulos iguaes, que são as metades dos angulos do mesmo polygono, por ser este regular; logo todos os ditos triangulos isosceles serão iguaes entre si (90); e por tanto *AC* = *BC* será = *DC* = *EC*, &c.: e por isso, e porque a cada dous triangulos contiguos

he

he huma destas rectas lado commum; concorreráõ todas no mesmo ponto *C* dentro do polygono. Logo &c.

140. *Coroll.* 1.° As perpendiculares *Cm*, *Cn*, *Ch*, &c., abaixadas do ponto *C* sobre os lados *AB*, *BD*, *DE*, &c., serão iguaes entre si. O ponto *C* chama-se *centro* do polygono; qualquer das rectas *CA*, *raio*; e as perpendiculares *Cm*, *Cn*, &c., *apothemas*.

141. *Coroll.* 2.° Póde-se pois sempre a qualquer polygono regular circunscrever hum circulo; o qual terá o mesmo centro, e raio do polygono. E tambem inscrever hum circulo; do qual será raio o apothema, e centro o mesmo do polygono.

142. *Coroll.* 3.° Todos os angulos *ACB*, *BCD*, &c., formados no centro do polygono regular por dous raios tirados aos extremos de hum mesmo lado, são iguaes entre si: e pois a somma de todos he 360°, será $\frac{360°}{n}$ o valor de cada hum delles; denotando *n* o numero dos lados.

143. *Coroll.* 4.° Logo o angulo *ACB*, no centro de hum hexagono regular, he de 60°: e por isso qualquer lado

AB

AB do dito hexagono, igual ao raio *CA* do mesmo, ou do circulo a elle circunscripto. Porque a somma dos dous angulos *CAB*, e *CBA* será de 120°; e por tanto cada hum delles de 60°, por serem iguaes entre si: logo he equiangulo o triangulo *ABC*; consequentemente equilatero; e por isso $AB = CA$.

Dos polygonos inscriptos, e circunscriptos ao circulo.

144. PROBL. *Inscripto em hum circulo hum polygono regular; inscrever hum outro tambem regular, cujo numero de lados seja duplo do numero dos lados do primeiro.*

Seja, *fig.* 82, o circulo *CABDA*; e sejão *AB*, *BD*, &c., os lados do polygono inscripto.

Solução. Dividão-se pelo meio nos pontos *F*, *G*, &c., os arcos *AB*, *BD*, &c. (42): tirem-se as cordas *AF*, *FB*, *BG*, *GD*, &c.: digo que estas cordas formaráõ o polygono pedido.

Demonstr. Porque sendo *AB*, *BD*, &c., lados de hum polygono regular, se-

rão iguaes os arcos *AB*, *BD*, &c. (40); e por consequencia iguaes as cordas das metades desses arcos (39); isto he, *AF* = *FB* = *BG* = *GD* = &c.: ora estas cordas formão o polygono *AFBGD*, &c., cujos angulos *AFB*, *BGD*, &c., são tambem iguaes, por serem iguaes os triangulos *AFB*, *BGD*, &c. (92); logo elle he regular; e de duas vezes tantos lados, quantos são os do primeiro, por quanto a cada hum lado *AB* do primeiro correspondem dous *AF*, e *BF* no segundo.

145. PROBL. *Inscrever em hum circulo hum polygono regular de* 4, 8, 16, *&c. lados.*

A questão se reduz a inscrever primeiro o de 4 lados; porque todos os outros se vão depois formando por meio deste, conforme acabámos de ensinar no Problema antecedente.

Seja pois, *fig.* 83, o circulo *CADBEA*, em que se pretende inscrever hum quadrilatero regular.

Solução. Tire-se hum diametro *AB*; e perpendicular a este o diametro *DE*; e pelos pontos *A*, *D*, *B*, *E*, em que elles

les encontrão a circunferencia, as rectas *AD*, *DB*, *BE*, *EA*: digo que estas quatro rectas formaráõ o quadrilatero pedido.

Demonstr. Porque sendo *AB*, e *DE* dous diametros, e perpendiculares entre si por construcção, serão iguaes os arcos *AD*, *DB*, *BE*, *EA*; e consequentemente iguaes as rectas *AD*, *DB*, *BE*, *EA*; isto he, os lados do quadrilatero *ADBE*: ora os seus angulos *ADB*, *DBE*, *BEA*, *EAB*, são tambem iguaes, por serem rectos (83); logo o quadrilatero *ADBE* he regular.

146. PROBL. *Inscrever em hum circulo hum polygono regular de* 3, 6, 12, *&c. lados.*

Reduz-se a questão a inscrever primeiro hum hexagono regular.

Seja, *fig.* 84, o circulo *CABDEA*.

Solução. Fazendo centro em hum ponto qualquer *A* da circunferencia, e com hum raio igual ao do circulo, se descreva hum arco, o qual corte a circunferencia em hum ponto *B*: deste, como centro, e com o mesmo raio, se descreva outro arco, que corte tambem a circunferencia em hum ponto *D*; e assim successivamente: tirem-se depois pelos pon-

tos das divisões as cordas AB, BD, &c.: digo que estas cordas formarão o hexagono pedido (143).

Para se inscrever o triangulo equilatero, se procederá da maneira seguinte.

Depois de ter inscripto os dous lados AB, e BD do hexagono regular, tire-se pelo ponto B o diametro BE; e pelos pontos A, D, E, as rectas AD, DE, EA: digo que estas tres rectas formarão o triangulo pedido.

Demonstr. Porque sendo BE diametro, serão os arcos BAE, e BDE, cada hum de 180°: mas cada hum dos arcos AB, e BD, he de 60°; logo cada hum dos tres $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{DE}$, e $\overset{\frown}{AD}$, será de 120°; e por tanto sendo iguaes, serão iguaes as suas cordas AE, DE, e AD; isto he, os lados do triangulo AED. Logo elle he equilatero.

147. PROBL. *Inscrever em hum circulo hum polygono regular de 5, 10, 20, &c., lados.*

Reduz-se a questão a inscrever primeiro o decagono regular.

Seja, *fig.* 85, o circulo $CABA$.

So-

Solução. Divida-se o raio CA no ponto E em media, e extrema razão (132); e inscreva-se a corda $AB = CE$, maior segmento: digo que AB he o lado do decagono regular.

Demonstr. Tire-se a recta EB, e o raio CB. Por ser $AC : CE :: CE : AE$; e $CE = AB$; temos $AC : AB :: AB : AE$: logo os triangulos ACB, e ABE são similhantes (118); e por tanto $ABE = ECB$, e $AEB = CAB$, e logo $EB = AB$ (78) $= CE$ por construcção; e por consequencia $ECB = EBC$ (77); e por isso $ABE = EBC$; d'onde $ABC = 2.ACB$; e tambem $BAC = 2.ACB$: mas $CAB + ABC + ACB = 180°$ (71), ou $2.ACB + 2.ACB + ACB = 180°$; logo $ACB = \frac{180°}{5} = 36°$; e conseguintemente AB será lado do decagono regular (142).

148. *Schol.* „ Póde-se pois pela ins-
„ cripção dos polygonos regulares em
„ hum circulo dividir a circunferencia em
„ hum certo numero de partes iguaes;
„ por ex., em arcos de 15°, cada hum,
„ inscrevendo hum polygono regular de
„ 24 lados: não será porém possivel di-
„ vidi-la em arcos de hum gráo; e só

„ por

» por tentativas o poderiamos conseguir,
» pois não offerece a Geometria elemen-
» tar meio algum para isso. Podemos com
» tudo chegar directamente até ao arco
» de 3.°, inscrevendo o lado do decagono
» regular, e depois o de hexagono regu-
» lar, tendo ambos hum extremo com-
» mum: porque partindo então ao meio
» o arco de 60.°, ter-se-há o de 6.°, dif-
» ferença entre o de 36.°, e o de 30.°,
» cuja metade dará o de 3.° »

149. PROBL. *Inscripto em hum circulo hum polygono regular; circuscrever ao mesmo circulo hum outro tambem regular do mesmo numero de lados. E reciprocamente: sendo dado o polygono circunscripto, construir o polygono inscripto.*

Seja, *fig.* 86, o circulo *CABDEFA*; e sejão *AB*, *BD*, *DE*, &c., lados do polygono regular inscripto.

Solução. Pelos pontos *A*, *B*, *D*, *E*, &c., tirem-se as tangentes *fa*, *ab*, *bd*, *de*, &c.: digo que estas tangentes devendo encontrar-se em pontos *a*, *b*, *d*, *e*, &c., formarão o polygono pedido.

Demonstr. Pois os lados *AB*, *BD*, *DE*,

DE, &c., são iguaes; e são iguaes os angulos *aAB*, *aBA*, *bBD*, *bDB*, *dDE*, *dED*, &c., formados pelas tangentes sobre estes lados, por comprehenderem os arcos iguaes *AB*, *BD*, *DE*, &c. (81); os triangulos *AaB*, *BbD*, *DdE*, &c., serão iguaes, e isosceles (90, e 78); e por tanto iguaes os angulos *AaB*, *BbD*, *DdE*, &c., e iguaes os lados *Aa*, *aB*, *Bb*, *bD*, *Dd*, *dE*, &c., que dão *ab* = *bd* = *de* = &c. Logo o polygono circunscripto *abdef* he equiangulo, e juntamente equilatero. Logo elle he regular; e do mesmo numero de lados do polygono inscripto, por quanto neste a cada hum angulo *ABD* corresponde naquelle hum lado *ab*.

Reciprocamente. Sejão agora *ab*, *bd*, *de*, &c. lados do polygono regular circunscripto; e quer-se inscrever hum outro do mesmo numero de lados.

Solução. Pelos pontos *B*, *D*, *E*, &c., tirem-se as rectas *BD*, *DE*, &c.: digo que estas rectas formarão o polygono pedido.

Demonstr. Com effeito por serem iguaes os angulos *b*, *d*, &c., do polygono circunscripto, e serem iguaes *Bb*, *bD*, *Dd*, *dE*, &c., metades dos lados *ab*, *bd*, *de*, &c.,

&c., do mesmo polygono, que os tem iguaes, serão iguaes os triangulos *BbD*, *DdE*, &c. (87); e por consequencia iguaes os lados *BD*, *DE*, &c., isto he, os lados do polygono inscripto *ABDEF*: mas por isso os arcos *BD*, *DE*, &c., são iguaes entre si; logo tambem iguaes os angulos *BDE*, *DEF*, &c., do mesmo polygono, pois comprehendem entre os seus lados igual numero destes arcos iguaes (82). Logo elle he regular; e do mesmo numero de lados do polygono circunscripto, por quanto neste a cada hum lado *ab* corresponde naquelle hum angulo *ABD*.

Tirando do centro do circulo para os vertices dos angulos do polygono circunscripto os raios *Ca*, *Cb*, *Cd*, &c.; e pelos pontos *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, &c., em que estes cortão a circunferencia, as rectas *a'b'*, *b'd'*, &c.; se formará com ellas hum polygono regular *a' b' d' e' f'*, que igualmente satisfará ao Problema. Porque sendo iguaes os angulos no centro *C* do polygono circunscripto, *a'Cb'*, *b'Cd'*, &c. (142); e sendo *Ca'* = *Cb'* = *Cd'* = &c.; serão iguaes, e isosceles os triangulos *a'Cb'*, *b'Cd'*, *d'Ce'*, &c.; e por tanto *a'b'* = *b'd'* = *d'e'* = &c. lados do po-

polygono inscripto $a'b'd'e'f'$; e $Cb'a' = Cb'd' = Cd'b' = Cd'e' =$ &c.; que dão $a'b'd' = b'd'e' =$ &c., angulos do mesmo polygono inscripto. Logo elle he regular, &c.

150. *Schol.* « He axioma: que de to-
» as linhas, que terminão nos mesmos
» pontos, a recta he a minima: e me-
» nor toda aquella convexa a respeito de
» qualquer outra, que a abranger entre
» si, e a dita recta. Assim a circunfe-
» rencia do circulo he sempre maior que
» o perimetro do polygono inscripto, e
» menor que o do circunscripto. (*) »

151. PROBL. *Dados dous circulos concentricos; circunscrever ao menor hum polygono regular, cujos lados não encontrem a circunferencia do maior.*

Sejão, *fig.* 87, os circulos concentricos, cujas circunferencias estão notadas por C, e c.

Solução. Tire-se huma recta AB tangente á circunferencia menor c; e para os pontos A, e B, em que esta tangente

(*) Ainda que quizemos dar a demonstração do que dissemos no *n.*° 33; não he porque isso nos não fosse da mesma evidencia.

te encontra a circunferencia maior, se dirijão os raios OA, e OB, que cortaráõ a menor nos pontos D, e E. Divida-se esta em tantos arcos iguaes, e em numero par, quantos forem necessarios, para que hum destes seja menor que $\widehat{cD}$: tome-se essa grandeza do ponto c para D, e para E, por ex., cd, e ce: tirem-se do centro rectas para cada hum dos pontos d, e e, até encontrarem a tangente em a, e b: digo que ab he o lado do polygono pedido: como he facil de ver.

Dos polygonos similhantes.

152. THEOR. *Se dous polygonos forem similhantes; serão os seus perimetros, como quaesquer dous lados homologos.*

Demonstr. Denotem A, B, C, D, &c., os lados de hum; e a, b, c, d, &c., os homologos do outro: será $A : a :: B : b :: C : c :: D : d ::$ &c., (113); e por conseguinte $A + B + C + D +$ &c. : $a + b + c + d +$ &c. :: $A : a :: B : b :: C : c ::$ &c.

153.

153. THEOR. *Se dous polygonos forem similhantes; elles se dividirão em igual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos, por diagonaes tiradas em cada hum delles a angulos respectivamente iguaes. E reciprocamente: se dous polygonos se dividirem em igual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; os dous polygonos serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 88, os polygonos similhantes *ABCDEF*, e *abcdef*; cujos lados homologos *AB*, e *ab*; *BC*, e *bc*; *CD*, e *cd*; &c.; e por conseguinte respectivamente iguaes os angulos, a que ficão adjacentes esses lados homologos. Dividão-se em triangulos, hum, e outro, pelas diagonaes *BF*, e *bf*; *FC*, e *fc*; *CE*, e *ce*; &c.: digo que ficarão divididos em igual numero de triangulos, respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.

Demonstr. Porque sendo os dous polygonos de igual numero de lados, dividir-se-hão em igual numero de triangulos (134). E será o primeiro *FAB* do polygono *P*, similhante ao primeiro *fab*

do

do polygono p, por ser o angulo $A = a$, e $AB : ab :: AF : af$, segundo a hypothese (118). E será o segundo FBC do polygono P, similhante ao segundo fbc do polygono p; porque sendo, pela similhança, dos dous triangulos primeiros, $AB : ab :: BF : bf$, e o angulo $ABF = abf$; e sendo, pela similhança dos polygonos, $AB : ab :: BC : bc$, e o angulo $ABC = abc$; he $BF : bf :: BC : bc$, e tirando os angulos ABF de ABC, e abf de abc, fica $FBC = fbc$. O mesmo se concluirá a respeito dos terceiros triangulos, e assim dos mais. Logo &c.

Reciprocamente. Sejão agora os polygonos P, e p, divididos em igual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; isto he, seja o primeiro triangulo FAB do polygono P, similhante ao primeiro fab do polygono p; o segundo ao segundo; e assim os mais: digo que os dous polygonos são similhantes.

Demonstr. Pois he, por hypothese, o triangulo FAB similhante ao triangulo fab; o triangulo FBC similhante ao triangulo fbc; e assim os mais; serão os angulos $A = a$; $ABF = abf$; $FBC = fbc$; &c.; e por tanto ABC (somma dos

dous

dous *ABF*, e *FBC*) = *abc* (somma dos dous *abf*, e *fbc*); e desta sorte se hirá mostrando a igualdade respectiva dos mais angulos dos polygonos. Ora, tambem pela similhança dos ditos triangulos, he *AF* : *af* : : *AB* : *ab* : : *BF* : *bf* : : *BC* : *bc* : : &c.; logo tirando desta serie de razões iguaes aquellas, em que entrão só os lados dos polygonos, virá *AF* : *af* : : *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : &c. Logo os dous polygonos tem os angulos respectivamente iguaes, e os lados homologos proporcionaes; e por tanto são similhantes.

154. PROBL. *Construir sobre huma recta dada hum polygono similhante a outro.*

Seja, *fig.* 88, o polygono *P*; e *ab*, a recta, sobre que se quer construir hum outro similhante.

Solução. Em hum dos extremos da dita recta, por ex. *b*, faça-se hum angulo *abc* = o angulo *ABC*; e tome-se *bc*, que seja quarta proporcional ás tres rectas *AB*, *BC*, e *ab* (125): faça-se do mesmo modo no ponto *c* o angulo *bcd* = o angulo *BCD*; e tome-se *cd*, quarta proporcional ás tres rectas *BC*, *CD* e *bc*:

con-

continuando-se desta maneira, será o polygono *p* construido sobre a recta *ab*, similhante ao polygono dado *P*.

O mesmo polygono se poderia construir, dividindo o dado *P* em triangulos, e fazendo sobre a recta *ab* o triangulo *abf* similhante ao triangulo *ABF*; isto he, fazendo no extremo *a* o angulo $a = A$; e no extremo *b* o angulo $abf = ABF$, o que determinaria o ponto *f*; e depois construindo do mesmo modo sobre *bf* o triangulo *bfc* similhante ao triangulo *BFC*, o que determinaria o ponto *c*; e assim por diante.

155. THEOR. *Se em dous polygonos similhantes se tirarem duas rectas, cada huma em cada hum, que façaõ angulos iguaes com dous lados homologos, e em pontos similhantemente postos a respeito destes lados; as ditas rectas, que tambem se chamaráõ linhas homologas, serão proporcionaes a quaesquer dous lados homologos.*

Sejão, *fig.* 89, os polygonos similhantes *P*, e *p*, cujos lados homologos *AB*, e *ab*; *BC*, e *bc*; &c.: tire-se pelo ponto *L* do lado *BC* huma recta *LM*;

e

e pelo ponto *l* do seu homologo *bc*, a recta *lm*; mas de modo que seja o angulo *blm* = o angulo *BLM*, e *BL* : *bl* :: *BC* : *bc* : digo que será *LM* : *lm* :: *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: &c.

Demonstr. Tire-se *AL*, e *al*; e será o triangulo *ABL* similhante ao triangulo *abl*, por ser o angulo *B* = o angulo *b*, e porque sendo *AB* : *ab* :: *BC* : *bc*, e *BC* : *bc* :: *BL* : *bl*, por hypothese; he *AB* : *ab* :: *BL* : *bl* (118): logo o angulo *BLA* = o angulo *bla*, e *BAL* = *bal*. Ora he *BLM* = *blm* por construcção, e *BAM* = *bam* por hypothese; se de *BLM* tirarmos *BLA*, e de *blm*, *bla*; ficará *ALM* = *alm*; e se de *BAM* tirarmos *BAL*, e de *bam*, *bal*; ficará *LAM* = *lam*; isto he, os dous triangulos *ALM*, e *alm*, tem dous angulos respecivamente iguaes, e por tanto são similhantes (114). Logo os dous quadrilateros *ABLM*, e *ablm*, pois se dividem em igual numero de triangulos similhantes, o serão entre si (153); e consequentemente he *LM* : *lm* :: *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: &c.

156. *Coroll.* Logo os perimetros de dous polygonos regulares de igual numero de lados estão entre si, como os seus raios, ou apothemas. Porque elles

les estão, como quaesquer lados homologos (152); e estes são, como os raios, ou apothemas, que tambem são linhas homologas.

157. THEOR. *As circunferencias dos circulos estão entre si, como os seus raios.*

Sejão, *fig.* 90, os circulos, cujas circunferencias estão notadas por C, e c: e representem R, e r, os respectivos raios: digo que $R : r :: C : c$.

Demonstr. Porque se não está $R : r :: C : c$; estará $R : r$, como C para huma circunferencia $C' > c$, ou $c' < c$: e sejão concentricas. Esteja $:: C : C'$. Circunscreva-se ao circulo menor c hum polygono regular, cujos lados não encontrem a circunferencia C' (151); e circunscreva-se ao maior C hum outro do mesmo numero de lados. Denote P o perimetro do maior, e p o do menor: será $P : p :: R : r$ (156): mas tambem suppozemos $R : r :: C : C'$; logo $P : p :: C : C'$: mas $P > C$ (150); logo tambem $p > C'$: o que he absurdo, por ser p ainda menor que o perimetro do polygono correspondente inscripto em C', o qual he menor que C'. Esteja pois

::

$:: C : c'$. Inscreva-se então no circulo menor c hum polygono regular, cujos lados não encontrem a circunferencia c'; e inscreva-se no maior C hum outro do mesmo numero de lados. Denote tambem P o perimetro do maior; e p, o do menor: será $P : p :: R : r$: mas tambem suppozemos $R : r :: C : c'$; logo $P : p :: C : c'$: mas $P < C$; logo tambem $p < c'$: o que he absurdo, por ser p ainda maior que o perimetro do polygono correspondente circunscripto a c', o qual he maior que c'. E pois não está $R : r :: C : C' > c$, ou $c' < c$; estará $R : r :: C : c$.

158. *Coroll.* Por tanto huma vez conhecida a grandeza, ou comprimento da circunferencia de hum circulo de hum dado diametro, será facil determinar a de hum outro circulo, cujo diametro for tambem dado: e he a isto que se diz *rectificar* a circunferencia de hum circulo.

A razão do diametro á circunferencia não he exactamente conhecida: temos porém valores sufficientemente approximados, para que na pratica se repute, como inutil huma maior approximação.

Por methodos, que nos não cumpre aqui tratar, se achou que a razão do diametro á circunferencia he a de 1 á 3,1415926536. Ludolfo de Ceulen foi o primeiro, que a deo. Temos tambem a de 113 a 355, publicada por Adriano Metio, e por elle attribuida a seu Pai Pedro Metio, a qual he mui facil de se conservar na memoria, e he exacta até á sexta casa da dizima. Com effeito sendo avaliada em decimaes, dá 3,1415929, valor verdadeiro até á dita sexta casa. A razão bem conhecida de 7 a 22, achada por Archimedes, sómente he exacta até a segunda casa decimal, como igualmente se póde ver, avaliando-a do mesmo modo. Assim seria necessario hum circulo de 1000000 pés de diametro para haver $\frac{3}{10}$ de pé de erro na circunferencia rectificada pela razão de Metio; e bastaria hum circulo, cujo diametro não tivesse menos de 800 pés, para haver hum de erro na circunferencia rectificada pela razão de Archimedes. Todas as vezes, porém, que desta fizermos uso, poderemos dispensar-nos de fazer a proporção; e bastará triplicar o diametro, e sommar este producto com a septima

par-

parte do mesmo diametro; por quanto $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

159. *Schol.* « Achada a grandeza da » circunferencia de hum circulo; se co- » nhecerá a de hum arco qualquer, cu- » jo numero de gráos, e partes do gráo » for dado; buscando o quarto termo de » huma proporção, em que os primeiros » tres termos são: 360°; o numero dos » gráos, e partes do gráo do arco; e a » circunferencia rectificada. Por quanto » em hum circulo são os comprimentos » dos arcos proporcionaes ao numero dos » gráos, e partes do gráo de cada hum » delles (18). »

SEGUNDA SECÇÃO.

Das superficies.

160. Consideraremos unicamente nesta Secção as superficies planas; e destas, só trataremos daquellas, que são terminadas por linhas rectas, ou pela cir-

cunferencia do circulo; isto he, trataremos tão sómente das áreas dos polygonos, e do circulo.

A medição das áreas depende (como veremos) da dos triangulos, e quadrilateros.

Temos chamado geralmente quadrilateros as figuras de 4 lados: porém entre estas ha humas, que tem o nome de *trapezio*; e outras o de *parallelogrammo*. Chama-se

Trapezio, o quadrilatero, que só tem dous lados parallelos entre si: *fig.* 91.

E *parallelogrammo*, o que tem tambem os outros dous lados parallelos entre si; e por isso iguaes (98): *fig.* 92, e 93.

Tambem entre os parallelogrammos ha huns, que tem o nome de *rectangulo*; e outros o de *quadrado*. Chama-se

Rectangulo, o parallelogrammo, que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos desiguaes: *fig.* 94.

E *quadrado*, o que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos iguaes: *fig.* 95.

A perpendicular, que de hum ponto qualquer de hum dos lados de hum parallelogrammo; ou de hum dos lados parallelos de hum trapezio; ou do verti-

ce

ce de hum dos angulos de hum triangulo; se abaixa sobre o lado opposto; se diz *altura* do parallelogrammo; ou do trapezio; ou do triangulo: e o lado, sobre que se abaixa a dita perpendicular, chama-se *base*. Assim *EF* nas *fig.* 91, 92, 93, 96; e *BA*, nas *fig.* 94, 95, he a *altura*; e *AD* he então *base*.

Por abreviarmos, nomearemos algumas vezes os parallelogrammos tão sómente pelas letras postas nos vertices de dous angulos oppostos; por ex., *fig.* 92, em vez de dizer o parallelogrammo *ABCD*, diremos o parallelogrammo *AC*, ou *BD*.

161. THEOR. *Se dous parallelogrammos tiverem a mesma base, e a mesma altura; ou bases iguaes, e alturas iguaes; terão áreas iguaes.*

Sejão, *fig.* 97, os parallelogrammos *ABCD*, e *AFED*, da mesma base, e da mesma altura: digo que estes dous parallelogrammos tem as áreas iguaes.

Demonstr. Com effeito, por ser o angulo *BAF* = o angulo *CDE* (63); e ser *AB* = *CD*, e *AF* = *DE* (98); serão iguaes os triangulos *BAF*, e *CDE* (87): ora a área do trapezio *ABED* com-

compõe-se da área do triangulo *CED* mais da área do parallelogrammo *ABCD*; ou da área do triangulo *BAF* mais da área do parallelogrammo *AFED*; logo, pois as dos triangulos são iguaes, serão necessariamente iguaes as dos parallelogrammos.

A respeito dos parallelogrammos de bases iguaes, e de alturas iguaes, a demonstração he a mesma: porque se reduzem ao caso presente, ajustando a base de hum com a base do outro, e sobrepondo-os.

162. *Coroll.* Segue-se pois: que dividindo, *fig.* 98, a base *AD* de qualquer rectangulo *AC* em quantas partes iguaes quizermos, por ex., *AE*, *EF*, &c.; e levantando nos pontos da divisão perpendiculares á dita base; ficará o rectangulo proposto *AC* tambem dividido em outros tantos rectangulos iguaes entre si, taes como *AI*, *EL*, &c., quantas são as partes, em que foi dividida a base *AD*. E por isso será *AI* : *EL* : *FM* : &c. :: *AE* : *EF* : *FG* : &c.; e por consequencia *AC* (somma de todos os antecedentes) : *AD* (somma de todos os consequentes) :: *AI* (hum só antecedente) :

AE

AE (seu consequente); ou como hum numero qualquer daquellas partes de *AC* para o mesmo numero d'estoutras partes de *AD*: por ex., : : *AL* : *AF* : : *EN* : *EH* : : *EC* : *ED* : : &c.

163. THEOR. *Se hum parallelogrammo, e hum triangulo tiverem a mesma base, e a mesma altura; ou bases iguaes, e alturas iguaes; será a área do triangulo metade da do parallelogrammo.*

Sejão, *fig.* 99, o parallelogrammo *ABCD*, e o triangulo *AFD*, da mesma base, e da mesma altura: digo que a área do triangulo he metade da do parallelogrammo.

Demonstr. Tire-se pelo ponto *D* huma recta *DE* parallela a *AF*; e continue-se *FC*, até que encontre *DE* em hum ponto *E*: será a área do parallelogrammo *ABCD* igual á do parallelogrammo *AFED* (161): mas he o parallelogrammo *AFED* composto dos dous triangulos *AFD*, e *DFE*, que são iguaes, como facilmente se póde demonstrar (92); logo será a área do triangulo *AFD* metade da do parallelogrammo *AFED*; e

por

por consequencia tambem metade da do parallelogrammo *ABCD*.

164. *Coroll.* Deste, e do precedente Theorema, se conclue: que são iguaes as áreas dos triangulos da mesma base, e da mesma altura; ou de bases iguaes, e alturas iguaes.

165. THEOR. *Se dous rectangulos tiverem* 1.° *a mesma altura, ou alturas iguaes; serão as suas áreas, como as suas bases*: 2.° *se a mesma base, ou bases iguaes; serão as suas áreas, como as suas alturas*: 3.° *se bases desiguaes, e alturas d siguaes; serão as suas áreas, como o producto das suas bases multiplicadas pelas suas alturas.*

1.° Sejão, *fig.* 100, os rectangulos *AF*, e *AH* da mesma altura *AE*: digo que *AF* : *AH* : : *AG* : *AD*.

Demonstr. Porque se não está *AF* : *AH* : : *AG* : *AD*; estará, como *AG* para huma base $X >$ ou $<$ *AD*. Esteja : : *AG* : : $X >$ *AD*; isto he, : : *AG* : *AR*. Divida-se *AG* em tantas partes iguaes, quantas forem necessarias, para que hum dos pontos da divisão, continuada, caia entre *D*, e *R*, por ex., em *I*; e comple-

plete-se o rectangulo EI: será $AF : EI :: AG : AI$ (162): mas tambem suppozemos $AF : AH :: AG : AR$; logo $EI : AH :: AI : AR$: mas $EI > AH$; logo tambem $AI > AR$: o que evidentemente he absurdo. Com igual raciocinio, e imitando, o que temos feito em outros lugares, se demonstrará não ser $AF : AH :: AG : X < AD$. E pois não está $AF : AH :: AG : X >$ ou $< AD$; estará $AF : AH :: AG : AD$.

2.° Sejão agora os rectangulos AH, e AC da mesma base AD: digo que $AH : AC :: AE : AB$.

He demonstrado, porque podemos tomar a base por altura, e a altura por base.

3.° Sejão porém os rectangulos AF, e AC de bases desiguaes, e alturas desiguaes: digo que $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$.

Demonstr. Pela 1.ª parte do Theorema temos $AF : AH :: AG : AD$; e pela 2.ª $AH : AC :: AE : AB$. Logo multiplicando ordenadamente os termos destas duas proporções; virá $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$. (*)

166.

(*) Não pareça que multiplicamos áreas por

166. *Coroll.* 1.° Se $AF = AC$; será $AG \times AE = AD \times AB$; donde $AG : AD :: AB : AE$; que quer dizer: que sendo iguaes em área dous rectangulos de bases desiguaes, ou de alturas desiguaes; as suas bases serão reciprocamente proporcionaes ás suas alturas.

167. *Coroll.* 2.° Quanto pois dissemos a respeito dos rectangulos; se estende em geral a quaesquer parallelogrammos; e por consequencia a quaesquer triangulos. Porque todo o parallelogrammo he igual em área ao rectangulo da mesma base, e da mesma altura (161). E quanto aos triangulos; como as suas áreas são a metade da de parallelogrammos, ou rectangulos, da mesma base, e da mesma altura dos triangulos (163); necessariamente hão de ter a mesma razão, que as

---

áreas, e linhas por linhas: multiplicão-se as razões geometricas entre si; isto he, numeros por numeros. Com effeito, a 1.ª proporção dá $\frac{AF}{AH} = \frac{AG}{AD}$; e a 2.ª, $\frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$: por conseguinte $\frac{AF}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{AG}{AD} \times \frac{AE}{AB}$; donde &c.

as desses parallelogrammos, ou rectangulos.

Da avaliação das áreas, e da sua medida.

168. Por quanto *medir* a área de huma figura, não he outra cousa mais, que compara-la com huma outra conhecida, a qual se considera então como unidade; procurando saber, quantas vezes se contem naquella, que se trata de medir; e por outro lado sabemos que as áreas dos parallelogrammos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas; segue-se: que, se denotar A a altura, e B a base de hum parallelogrammo P, cuja área se pretende avaliar, e a a altura, e b a base de hum parallelogrammo p, tomado para medida, ou unidade d'área; teremos conhecida a daquelle, visto que podemos saber, quantas vezes contém a deste. E com effeito por ser $P : p :: B \times A : b \times a$; será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$; o que faz ver: que, para avaliarmos a área de hum parallelogrammo qualquer P, deveremos, de-

depois de examinarmos, quantas vezes na sua base B se contém a base b da unidade d'área, e quantas na altura A se se contém a altura a, multiplicar esses dous quocientes; e o producto nos mostrará o numero de vezes, que a área, escolhida para unidade, se contém naquella do parallelogrammo P, que se trata de avaliar.

Como porém a medida geral das áreas, e a mais natural, he hum quadrado conhecido, por ex., hum pé quadrado, huma braça quadrada, &c.; no caso de que por p escolhamos huma qualquer dessas medidas, por ex., hum pé quadrado (1^{pp}); então $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$, se torna em $\frac{P}{1^{pp}} = \frac{B}{1^{p}} \times \frac{A}{1^{p}}$, ou $P = B \times A$; expressão abreviada, e d'onde vem dizer-se geralmente que

A área de hum parallelogrammo se avalia multiplicando a base pela altura; e por tanto a de hum quadrado pela segunda potencia do seu lado (*).

Não

(*) Por isso se diz quadrado de hum numero, ainda que impropriamente, a segunda potencia desse numero.

Não se perca porém de vista, todas as vezes que assim nos expressarmos, que sempre se deve entender por esse producto o numero de medidas quadradas, que se contém na área procurada.

169. *Coroll.* 1.° Será pois avaliada a área de hum triangulo, tomando a metade do producto da base multiplicada pela altura (163).

170. *Coroll.* 2.° E daqui se segue: que em dous triangulos similhantes são as áreas, como os quadrados dos lados homologos. Porque elles podem sempre ter por base quaesquer lados homologos B, e b; e por consequencia as suas alturas A, e a, serão tambem linhas homologas (155); e por isso sendo $A : a :: B : b$, e $\frac{1}{2} B : \frac{1}{2} b :: B : b$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{2} B \times A : \frac{1}{2} b \times a :: B^2 : b^2$.

171. *Coroll.* 3.° Logo em geral as áreas de dous polygonos similhantes estão entre si, como os quadrados de quaesquer dous lados, ou linhas homologas. Porque as áreas dos polygonos similhantes sempre se podem considerar, como compostas de igual numero de triangulos respectivamente simi-

milhantes, e similhantemente dispostos: e então a área de cada triangulo do 1.° polygono será para a do triangulo correspondente no 2.°, como o quadrado de hum lado daquelle para o quadrado do homologo deste: e pois todos os lados homologos tendo a mesma razão, tambem devem ter a mesma razão os seus quadrados; será a área de cada triangulo do 1.° polygono para a área do seu correspondente no 2.°; como o quadrado de qualquer lado do 1.° polygono para o quadrado do seu homologo no 2.°: e por consequencia a somma das áreas de todos os triangulos, de que se compõe o 1.° polygono, isto he, a sua área, para a somma das de todos os triangulos, de que se compõe o 2.° polygono, isto he, a sua área, como o quadrado de hum lado qualquer do 1.° para o quadrado do seu homologo no 2.°.

172. *Schol.* « Vê-se por tanto que » nos polygonos similhantes basta com- » parar os quadrados de quaesquer lados, » ou linhas homologas, para se saber a » relação, que se dá entre as suas áreas. » Porém geralmente em quaesquer figu- » ras he necessario primeiramente ava-

» liar

» liar a área de cada huma, e depois
» comparar esses valores, referidos a hu-
» ma mesma medida; e para isto nos
» serve a avaliação das áreas dos trian-
» gulos, pois por meio dellas se póde
» sempre avaliar a área de hum poly-
» gono qualquer; o que se faz, dividin-
» do o polygono em o menor numero
» de triangulos possivel (134), calcu-
» lando separadamente a área de cada
» hum, e depois sommando todos esses
» resultados. Com tudo, ainda que em
» geral este he o meio de avaliar as áreas
» das figuras, não he elle o mais expe-
» dito em alguns casos, nem applicavel
» ás figuras curvilineas: temos methodos
» mais promptos, como vamos a ver nos
» Theoremas seguintes. »

173. THEOR. *Se a figura for hum trapezio; será avaliada a sua área pelo producto da semi-somma dos lados parallelos multiplicada pela altura.*

Seja, *fig.* 91, o trapezio *ABCD*; e *EF* a sua altura: digo que a área *ABCDA* $= \frac{AD+BC}{2} \times EF$.

Demonstr. Tire-se a diagonal *BD*; e pois

pois a área do trapezio proposto se compõe da área do triangulo $ABD = \frac{AD \times EF}{2}$ (169), e da do triangulo $BCD = \frac{BC \times EF}{2}$; será a área do trapezio $ABCDA = \frac{AD \times EF}{2} + \frac{BC \times EF}{2} = \frac{AD + BC}{2} \times EF$.

174. *Schol.* "Em lugar de $\frac{AD + BC}{2}$ " podemos substituir a linha GM, tira- " da pelo ponto G, meio do lado AB, " parallelamente a AD; isto he, póde- " se dizer que a área de hum trapezio " se avalia tambem multiplicando pela " altura a linha tirada a igual distancia " dos lados parallelos. Com effeito, por " ser $BG = \frac{1}{2} AB$, e GM parallela a " AD, os triangulos similhantes ABD, " e GBI dão $GI = \frac{1}{2} AD$; e os trian- " gulos similhantes BDC, e IDM, dão " $IM = \frac{1}{2} BC$. Logo $GI + IM$, ou GM " será $= \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} BC = \frac{AD + BC}{2}$."

175. THEOR. *Se a figura for hum polygono regular; será avaliada a sua área por metade do producto do perimetro multiplicado pelo apothema.*

Se-

Seja, *fig.* 81, o polygono regular *ABDE*, &c.: denote *a* o apothema *Cm*; *n*, o numero dos lados; *L*, hum qualquer *AB*; por consequencia $n \times L$, ou *P*, o perimetro; e *A*, a área: digo que $A = \frac{1}{2} P \times a$.

Demonstr. Como os raios de hum polygono regular o dividem em tantos triangulos isosceles iguaes, quantos são os lados do mesmo polygono (139); he evidente que, para avaliarmos a sua área, bastará calcular a área de hum qualquer desses triangulos, e multiplicar depois o resultado pelo numero dos lados do polygono. Ora a área de qualquer dos ditos triangulos he $\frac{AB \times Cm}{2}$, ou $\frac{L \times a}{2}$; logo será a do polygono proposto $= n. \frac{L \times a}{2}$; isto he, $A = \frac{1}{2} P \times a$.

176. THEOR. *Se a figura for hum circulo; será avaliada a sua área por metade do producto da circunferencia multiplicada pelo raio.*

Seja, *fig.* 146, o circulo, cuja circunferencia está notada por *C*; e repre-

sente R o raio; e A, a área: digo que $A = \frac{1}{2} C \times R$.

Demonstr. Porque se não he $A = \frac{1}{2} C \times R$; seja $\frac{1}{2} C \times R$ o valor da área de hum outro circulo maior, ou menor que o proposto. Seja $= A'$, área do circulo maior, cuja circunferencia está notada por C', descripta no mesmo plano, e concentrica a C. Imagine-se circunscripto ao circulo proposto C hum polygono regular, cujos lados não encontrem a circunferencia C' (151); e denote P o perimetro desse polygono: será a sua área $= \frac{1}{2} P \times R$ (175). Ora esta área he evidentemente menor que a do circulo C'; logo será $\frac{1}{2} P \times R < \frac{1}{2} C \times R$, isto he, $P < C$: o que he absurdo (150). Seja pois $\frac{1}{2} C \times R = a$, área do circulo menor, cuja circunferencia está notada por c, descripta no mesmo plano, e concentrica a C. Imagine-se circunscripto ao circulo c hum polygono regular, cujos lados não encontrem a circunferencia C; e denote p o perimetro desse polygono, e r o raio do circulo c: será a sua área $= \frac{1}{2} p \times r$. Ora esta área he evidentemente maior que a do circulo c; logo será $\frac{1}{2} p \times r > \frac{1}{2} C \times R$: o que he absurdo, por ser $r < R$; e $p < C$, pois

pois he p ainda menor que o perimetro do polygono correspondente inscripto em C, o qual he menor que C (150). E pois não he $\frac{1}{2} C \times R = A' > A$, nem $= a < A$; será $A = \frac{1}{2} C \times R$.

177. *Coroll.* 1.° Avaliando-se a área de hum circulo por metade do producto da circunferencia multiplicada pelo raio; segue-se que a de qualquer sector se avaliará tambem por metade do producto do seu arco multiplicado pelo raio. Porque sabemos que em hum mesmo circulo são as áreas dos sectores proporcionaes aos seus arcos; e assim, denotando S a área de hum sector, e a o seu arco, he $C : \widehat{a} :: \frac{1}{2} C \times R : S$ (17); donde $S = \frac{1}{2} \widehat{a} \times R$.

178. *Coroll.* 2.° As áreas dos circulos, ou dos sectores similhantes, isto he, do mesmo numero de gráos, estão entre si, como os quadrados dos seus raios. Porque denotando C, e c, as respectivas circunferencias; R, e r, os raios; he $C : c :: R : r$ (157); he $\frac{1}{2} R : \frac{1}{2} r :: R : r$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{2} C \times R : \frac{1}{2} c \times r :: R^2 : r^2$.

179. *Schol.* « A proposição *n.* 177,

» juntamente com a do *n.*° 169, nos ser-
» virá para avaliarmos a área de qual-
» quer segmento *AGBA*, *fig.* 19 : por
» quanto esta he a differença entre a área
» do sector *CAB*, e a do triangulo *ACB*. »

180. THEOR. *Se sobre os tres lados de hum triangulo rectangulo se construirem tres figuras similhantes, cada huma sobre cada hum; será a área da figura formada sobre a hypothenusa igual á somma das áreas das figuras formadas sobre os outros dous lados.*

Seja, *fig.* 101, o triangulo *ABC* rectangulo em *A*; e denotem S, S', S'', as áreas das figuras similhantes construidas sobre os lados do triangulo: digo que $S = S' + S''$.

Demonstr. Abaixe-se do ponto *A* sobre a hypothenusa a perpendicular *AD*; e representando por T a área do triangulo *ABC*; por T' a do triangulo *ABD*; e por T'' a do triangulo *ADC*; teremos, por serem estes similhantes (115), $T : T' : T'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (171): mas tambem, pela similhança das figuras, he $S : S' : S'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$; logo $S : S'$:

$S' : S'' :: T : T' : T''$; e por conseguinte $S : S' + S'' :: T : T' + T''$: mas he evidentemente $T = T' + T''$; logo tambem $S = S' + S''$. (*)

181. *Coroll.* 1.° Como os triangulos ABC, ABD, e ADC, tem todos a mesma altura AD; he $T : T' : T'' :: BC : BD : DC$ (167, e 165): mas tambem, segundo acabamos de demonstrar, he $T : T' : T'' :: S : S' : S''$; logo $S : S' : S'' :: BC : BD : DC$; que quer dizer: que a área da figura formada sobre a hypothenusa he para cada huma das áreas das figuras similhantes formadas sobre os outros dous lados, como a hypothenusa para cada hum dos segmentos adjacentes a estes lados.

182. *Coroll.* 2.° Consequentemente em hum circulo, *fig.* 102, serão os quadrados de quaesquer cordas AD, e AE, como os segmentos adjacentes AG, e AF,

(*) He hum caso particular deste Theorema aquella celebre proposição do quadrado da hypothenusa, a qual vem demonstrada em particular em algumas Geometrias; isto he, que a área do quadrado formado sobre a hypothenusa he igual á somma das áreas dos quadrados formados sobre os outros dous lados.

AF, do diametro AB, cortado pelas perpendiculares DG, e EF, abaixadas sobre elle dos extremos das ditas cordas. Com effeito, tirando as rectas DB, e EB, os trinangulos ADB, e AEB, rectangulos em D, e E (83), dão $\overline{AD}^2 : AG :: \overline{AB}^2 : AB$; e $\overline{AE}^2 : AF :: \overline{AB}^2 : AB$; e por conseguinte $\overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AG : AF$.

183. *Schol.* « A proposição *n.*° 180 » nos offerece hum meio de acharmos o » valor numerico de qualquer dos lados » de hum triangulo rectangulo, quando » forem dados os outros dous. Porque » sendo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; e por con- » sequencia $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$; se da- » dos os dous lados do angulo recto se » pedir a hypothenusa; será $BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$: e se dada a hypothe- » nusa, e hum dos outros lados, por ex., » AC, se pedir o terceiro; será $AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}$. »

184. PROBL. *Construir hum polygono, que seja similhante a outro, e cuja área esteja para a d'estoutro em huma dada razão.*

Seja, *fig.* 103, o polygono dado X; e $m : n$, a razão, que deve ter a área deste para a do que se pretende construir.

Solução. Tire-se huma linha indefinida DE, sobre a qual se tomem duas partes DP, e PE, taes, que seja $DP : PE :: m : n$ (122). Sobre DE, como diametro, se descreva a semi-circunferencia DME; e levantando do ponto P a perpendicular PM até a encontrar em hum ponto M, tirem-se deste para os extremos do diametro as cordas MD, e ME: tome-se sobre MD de M para D huma parte MF igual a hum dos lados do polygono, por ex., AB; e tire-se pelo ponto F a recta FG, parallela a DE, até encontrar a corda ME em hum ponto G: construindo então sobre a parte MG, como homologo de AB, hum polygono similhante ao dado X (154); digo que esse polygono satisfará ás condições do Problema.

Demonstr. Com effeito, por ser PM perpendicular a DE, será $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: DP$

$\overline{DP}^2 : \overline{PE}^2$ (182), ou $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: m : n$, visto que he $m : n :: DP : PE$, por construcção: mas por ser FG parallela a DE, he $MD : ME :: MF$, ou $AB : MG$; e por consequencia $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MG}^2$: logo tambem $\overline{AB}^2 : \overline{MG}^2 :: m : n$: mas he $\overline{AB}^2 : \overline{MG}^2 ::$ a área do polygono X: a área do similhante, construido sobre MG (171); logo tambem as ditas áreas estarão naquella razão.

185. PROBL. *Dado hum circulo; inscrever, ou circunscrever-lhe, hum polygono regular, cuja área diffira da do circulo tão pouco, como se quizer.*

Seja, *fig.* 104, o circulo $CABDA$: pretende-se o polygono inscripto.

Solução. Inscreva-se qualquer polygono regular ABD, &c.: sobre este inscreva-se hum outro tambem regular, mas de duplicado numero de lados, AFB, &c. (144); e continue-se assim: digo que chegar-se-ha a inscrever hum polygono, que satisfaça ao Problema.

De-

Demonstr. Com effeito, tirada pelo ponto *F* a tangente *mn*, e construido sobre *AB* o rectangulo *Am*, he sabido que a área do triangulo *AFB* he metade da desse rectangulo (163). Ora a área do rectangulo he evidentemente maior que a do segmento *AFBA*; logo a do triangulo será tambem maior que a da metade do segmento; e por conseguinte tirado do segmento o triangulo, será o residuo, isto he, a somma das áreas dos segmentos *AFA*, *BFB*, menor que a metade da área do segmento *AFBA*. Logo se os lados dos polygonos inscriptos se forem successivamente duplicando, sempre se hirá tirando mais, e mais que a metade do residuo; e por consequencia he manifesto que chegar-se-ha a huma differença tão pequena, que seja menor, que qualquer assignado.

Seja agora, *fig.* 104 *, o circulo *CDGD*: pretende-se o polygono circunscripto.

Solução. Circunscreva-se hum polygono regular, cujo meio lado seja *DF*. Sobre este circunscreva-se hum outro tambem regular, mas de duplicado numero de lados, *DHG*, &c.; e continue-se assim: digo que chegar-se-ha a circunscre-

ver

ver hum polygono, que satisfaça ao Problema.

Demonstr. Tire-se a corda DG; e DI perpendicular a CF. Por quanto he $DH = HG$, e $FH > HG$; será $FH > HD$; e por consequencia $FG > GI$ (108). Ora $\frac{1}{2} FG \times HG$ he a expressão da área do triangulo FHG; e $\frac{1}{2} GI \times HG$ a da do triangulo HDG; logo será a área do triangulo $FHG >$ a área do triangulo HDG; e por conseguinte a área do mesmo FHG maior que a metade da do triangulo FDG: mas he a área deste FDG evidentemente maior que a do trilatero $FDoG$; logo a do triangulo FHG muito maior que a metade da do mesmo trilatero $FDoG$; isto he, a área do residuo $HDoG$, depois de tirado o triangulo FHG do trilatero $FDoG$, será menor que a metade da área deste trilalero. Logo se os lados dos polygonos circunscriptos se forem successivamente duplicando, sempre se hirá tirando mais, e mais que a metade do residuo; e por consequencia he manifesto que chegar-se-ha a huma differença tão pequena, que seja menor que qualquer assignado.

186. Concluiremos esta Secção expondo hum methodo, muito simples na prá-

prática, para se medirem as áreas de humas tantas figuras; bem que o que deixamos dito (172), seja bastante para a medição das áreas das figuras de toda a especie. Consiste elle, *fig.* 105, em tirar na figura huma linha *AG*, e abaixar sobre ella dos vertices de cada hum dos angulos as perpendiculares *BM*, *CL*, *DK*, *EI*, *FH*; medir cada huma destas linhas, como tambem os intervallos *AN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RG*: e porque a figura fica repartida em muitas partes, das quaes ao menos as duas extremas são triangulos, e as de mais trapezios; medir aquelles, multiplicando a base por metade da altura (169); e estes, multiplicando a semi-somma dos lados parallelos pela distancia perpendicular destes mesmos lados (173).

Quando a figura he terminada por huma linha curva; medir-se-ha com huma sufficiente exactidão para a prática, dividindo a linha *AT*, *fig.* 106, que se tirará pelo seu maior comprimento, em hum grande numero de partes, a fim de que os arcos, que estão entre as linhas, *AB*, *BC*, &c., se possão considerar, como linhas rectas: e para fazer o calculo mais simples que he possivel, se farão

as

as partes *AO*, *OP*, &c., iguaes entre si. Para ter então a área, sommar-se-hão todas as linhas *BN*, *CM*, &c., e só metade da linha *GH*, se a curva he terminada por huma recta *GH* perpendicular a *AT*: tudo isto se multiplicará por hum dos intervallos *AO*; e o producto será o valor da área, que se busca. He huma immediata consequencia do que dissemos (173).

Se se tratasse do espaço *BNHG* terminado pelas linhas *BN*, e *HG*; tomar-se-hia não *BN* inteira, mas sómente a sua metade.

Introducção á terceira Secção.

Dos planos.

187. Antes de passarmos a tratar dos corpos, convem examinarmos as propriedades das linhas rectas nas differentes posições, que tem a respeito dos planos; e as dos planos nas differentes posições, que tem huns comparados com outros. Não supporemos presentemente nelles, nem grandeza, nem figura determinada: consi-

sidera-los-hemos indefinidamente extensos para toda a parte; e só para ajudar a imaginação, he que os representaremos com certa figura.

188. Huma linha recta não póde estar, parte em hum plano, e parte mais elevada, ou mais baixa a respeito desse plano. E o mesmo se deve entender de hum plano a respeito de outro plano. São consequencias do que dissemos (6, e 7).

189. A intersecção de dous planos he sempre huma linha recta. Que he linha, segue-se da precedente, e da definição, que démos da superficie: e mostra-se que he recta; por quanto não póde haver nessa intersecção hum ponto, que com quaesquer outros dous della não esteja em linha recta, sem que os planos se confundão (7).

190. *Coroll.* Póde-se pois fazer, com que passem; quantos planos quizermos, por huma mesma linha recta.

191. *Advert.* Podem no Espaço duas rectas ser perpendiculares a huma terceira, sem ser parallelas entre si, e sem todavia se encontrarem. Com effeito, se no plano *ABCD*, *fig.* 107, que passa por huma recta *BD*, se tirarem duas perpendiculares *BA*, e *DC* á dita recta, ellas

se-

serão parallelas entre si (59): mas não a respeito de outras quaesquer perpendiculares, que em hum desses pontos *B*, ou *D*, se fizerem levantar á dita recta nos differentes planos, que por ella podem passar (56).

Das linhas rectas consideradas nas differentes posições, que podem ter a respeito dos planos.

192. THEOR. *Se huma recta for perpendicular a outras duas rectas no ponto, onde estas duas se cortão; será tambem perpendicular a todas as mais rectas, que a tocarem, existentes no plano das duas*: (*e se dirá* perpendicular *ao plano*; *e reciprocamente*).

Seja, *fig.* 108, a recta *CD* perpendicular ás duas *Ee*, e *Ff* no ponto *D*, em que estas duas se cortão; e seja *AB* o plano, que ellas determinão: digo que *CD* he perpendicular a todas as mais rectas, que a tocarem, existentes no plano *AB*.

Demonstr. Tire-se pelo ponto *D* no plano *AB* huma recta indefinida *Gg*; e to-

tomem-se iguaes as partes *DE*, *De*, *DF*, *Df*; e tirem-se *FE*, e *fe*: serão os triangulos *DEF*, e *Def* iguaes entre si, como tendo dous lados iguaes a dous lados, cada hum a cada hum, e iguaes os angulos formados por esses lados, a saber, *EDF*, e *eDf*: por conseguinte será *FE* = *fe*; e por isso, e porque são iguaes as obliquas *CF*, e *Cf*; *CE*, e *Ce*; pois se desvião igualmente da perpendicular *CD* nos planos *FCf*, e *ECe* (27); serão iguaes os triangulos *FCE*, e *fCe* (92); e logo o angulo *CEF* = o angulo *Cef*. Temos tambem que os triangulos *GDE*, e *gDe* são iguaes, por ser *DE* = *De* por construcção, e ser o angulo *GDE* = o angulo *gDe*, e o angulo *DEG* = o angulo *Deg*, pela igualdade dos triangulos *DEF*, e *Def*: logo será *EG* = *eg*; por cuja razão, e porque concluimos ser *CE* = *Ce*, e iguaes os angulos *CEF*, e *Cef*, serão os triangulos *CEG*, e *Ceg* iguaes entre si: mas he por isso *CG* = *Cg*, e he pela igualdade dos triangulos *GDE*, e *gDe*, *DG* = *Dg*; logo será *CD* perpendicular a *Gg* (31): porém he *Gg* huma recta qualquer tirada pelo ponto *D* no plano *AB*; logo será *CD* perpendicular a todas as rectas,

que

que a tocarem, existentes no dito plano; isto he, perpendicular ao plano *AB*.

193. *Coroll.* De hum mesmo ponto tomado em hum plano não se póde levantar mais do que huma perpendicular a esse plano. Porque tirando por duas, que fossem, hum outro plano, que cortaria o primeiro; nesse teriamos levantado de hum mesmo ponto da sua commum secção duas perpendiculares a esta: o que he absurdo (22).

194. A recta, que não he perpendicular a hum plano, se diz *obliqua*, ou *inclinada* a esse plano: e a sua inclinação mede-se pelo angulo formado pela mesma recta, e por outra existente no plano entre aquella, e a perpendicular, que de qualquer ponto da dita inclinada se abaixar sobre o mesmo plano. Por ex., *fig.* 108, se *CE* he qualquer obliqua ao plano *AB*; e *CD*, a perpendicular; o angulo *CED* medirá a inclinação da recta *CE* a respeito do plano *AB*.

195. THEOR. *Se duas, ou mais obliquas a hum mesmo plano, tiradas de hum mesmo ponto tomado fóra delle, forem iguaes; ellas se desviarão igualmen-*

mente da perpendicular, que do dito ponto se abaixar sobre o dito plano; e farão com ella angulos iguaes. E se forem desiguaes as obliquas; a menor se desviará menos da perpendicular, e fará com ella hum angulo menor.

1.° Sejão, *fig.* 109, as rectas DE, DF, &c., obliquas iguaes, tiradas para o plano AB do ponto D tomado fóra; e DC, perpendicular: digo que $CE = CF =$ &c.

Demonstr. Pois por hypothese he DC perpendicular ao plano AB; os triangulos DCE, DCF, &c., serão rectangulos em C; e serão iguaes entre si, por ser DC lado commum a todos, e todos terem iguaes hypothenusas, por hypothese (95): logo será $CE = CF =$ &c.; e o angulo $EDC =$ o angulo $CDF =$ &c.

2.° Seja porém $DG > DE$: digo que $CG > CE$.

Demonstr. Conceba-se totalmente applicado o triangulo CDE sobre o triangulo CDG: cahirá CE sobre CG, por ser o angulo $DCE =$ o angulo DCG, como rectos: mas he $DG > DE$, por hypothese; logo o ponto E cahirá entre C, e G (26); isto he, será $CG > CE$.

Igualmente he manifesto ser o angulo $CDG > CDE$.

196. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: se duas, ou mais obliquas a hum mesmo plano, tiradas de hum mesmo ponto tomado fóra delle, se desvião igualmente da perpendicular abaixada do dito ponto sobre o dito plano, ou fazem com ella angulos iguaes; essas obliquas são iguaes. E as que menos se desviáo, ou fazem com ella angulo menor, menores são.

197. *Coroll.* 2.° Logo a perpendicular he a minima; e por conseguinte a unica, que de hum ponto, tomado fóra de hum plano, se póde abaixar sobre esse plano. (He por ella que se mede a distancia, isto he, a altura, em que está hum ponto a respeito de hum plano.)

198. THEOR. *Se tres rectas forem perpendiculares a huma quarta recta em hum mesmo ponto desta; as ditas tres rectas estarão no mesmo plano.*

Sejão, *fig.* 110, as rectas AB, BC, e BD perpendiculares a EB no ponto B: digo que AB, BC, e BD estão todas no mesmo plano. *De-*

Demonstr. Se he possivel, não esteja *BC* no plano das duas *AB*, e *BD*; e seja *BF* a intersecção desse plano com o plano das outras duas *EB*, e *BC*. Pois *EB* he perpendicular a *AB*, e a *BD*, por hypothese; será *EB* tambem perpendicular a *BF* (192): mas he igualmente por hypothese *EB* perpendicular a *BC*; logo no plano *EBC* estão duas perpendiculares *BF*, e *BC* levantadas do mesmo ponto *B* á recta *EB*: o que he absurdo (22). Logo &c.

199. *Coroll.* Por hum mesmo ponto de huma recta não se podem conduzir dous planos perpendiculares a essa recta. Porque se fosse isso possivel; poder-se-hião então tirar por esse ponto tres rectas; a saber, duas em hum dos planos, e huma no outro, que não estarião todas em o mesmo plano; contra o que acabámos de demonstrar.

200. PROBL. *De hum ponto, dado em hum plano, levantar huma perpendicular a esse plano.*

Seja, *fig.* 111, *AB*, o plano; *C*, o ponto.

Solução. Tirem-se no dito plano pelo

ponto dado duas rectas *DE*, e *FG* perpendiculares entre si : e fazendo passar por huma dellas, por ex., por *DE*, hum plano qualquer, nesse se tire huma perpendicular a *DE* no ponto *C*, e seja *CH*: então, se no plano determinado pelas duas rectas *CH*, e *CF*, tirarmos tambem huma perpendicular *CI* á recta *FG* no mesmo ponto *C*, digo que *CI* he a perpendicular pedida.

Demonstr. Com effeito, por ser *DC* perpendicular a *CH*, e a *CF* por construcção, será tambem *DC* perpendicular á recta *CI* tirada no plano das duas *CH*, e *CF* (192) : mas he *CI*, igualmente por construcção, perpendicular a *CF*; logo será *CI* perpendicular ao plano *DCF*; isto he, ao plano *AB*.

201. PROBL. *De hum ponto, dado fóra de hum plano, abaixar huma perpendicular a esse plano.*

Seja, *fig.* 109, *AB*, o plano; *D*, o ponto.

Solução. Tire-se do ponto *D* para o plano huma recta *DE*, tal, que com ella, fazendo centro em *D*, se descreva no mesmo plano huma circunferencia de cir-

circulo *EFHE*, como necessariamente o será (195): determine-se o seu centro (43); e por este, e pelo ponto dado *D* tire-se a recta *CD*: digo que he *CD* a perpendicular pedida.

202. PROBL. *Por hum ponto dado em huma recta conduzir hum plano perpendicular a essa recta.*

Seja, *fig.* 112, *EF*, a recta; *G*, o ponto.

Solução. Faça-se passar por *EF* dous planos quaesquer *EFH*, e *EFI*: tire-se em hum a perpendicular *GH*, e no outro a perpendicular *GI*, á recta *EF* no ponto *G*: digo que o plano *HGI*, determinado por estas duas perpendiculares, he o plano pedido (192).

203. THEOR. *Se pelo vertice de hum angulo, que mede a inclinação de huma recta obliqua, a respeito de hum plano, se tirar nesse plano huma perpendicular á outra recta, que fórma com aquella obliqua o dito angulo; será essa perpendicular tambem perpendicular á mesma recta obliqua.*

Se-

Seja, *fig.* 113, o plano *AB*; e a recta obliqua *CD*: e seja o angulo *CDE*, o que mede a inclinação de *CD* a respeito do plano *AB*: tire-se *FG* perpendicular a *DE* no ponto *D*, e no plano *AB*: digo que *FG* será tambem perpendicular a *CD*.

Demonstr. De qualquer ponto *C* da obliqua *CD* se abaixe *CE* perpendicular ao plano; que cahirá sobre *DE* (194): tome-se *DF* = *DG*; e tirem-se as rectas *GE*, e *EF*; *CG*, e *CF*: será *GE* = *EF*, por ser *DE*, por construcção, perpendicular ao meio de *FG* (27); por conseguinte as rectas *CG*, e *CF*, se desvião igualmente de *CE* perpendicular por construcção ao plano *AB*: logo he *CG* = *CF* (196): logo os pontos *C*, e *D* da recta *CD* estão igualmente distantes dos pontos *F*, e *G* da recta *FG*: logo he *CD* perpendicular a *FG* (31).

204. THEOR. *Se duas rectas forem parallelas, e for huma dellas perpendicular a hum plano; será a outra tambem perpendicular ao mesmo plano; produzida, sendo necessario.*

Sejão, *fig.* 107, as rectas parallelas *AB*,

AB, e *CD*; e *AB* perpendicular ao plano *GE*: digo que tambem *CD* he perpendicular ao mesmo plano *GE*.

Demonstr. Tire-se a recta *AD*; e no plano *GE* a recta *FH*, perpendicular no ponto *D* á intersecção *BD* do plano das parallelas com aquelle plano: será *FH* tambem perpendicular a *AD* (203); e por tanto perpendicular ao plano *ABD* (192): logo *FH* igualmente perpendicular a *CD*, porque está nesse plano: mas he *CD* tambem perpendicular a *BD*, por ser parallela a *AB* perpendicular ao plano *GE*, e por isso perpendicular a *BD* (57); logo *CD*, perpendicular ás duas *BD*, e *FH*, será perpendicular ao plano, em que ellas estão; isto he, ao plano *GE*.

205. *Coroll.* Duas rectas, pois, *AB*, e *CD*, perpendiculares a hum mesmo plano *GE*, são parallelas entre si. Com effeito a parallela, que pelo ponto *D* se tirasse a *AB* no plano *ABD*, seria perpendicular ao plano *GE*: e pois de hum mesmo ponto não se póde levantar mais do que huma perpendicular a hum plano (193); ella seria a mesma perpendicular *CD*.

206. THEOR. *Se duas rectas forem parallelas a huma terceira, ainda que situadas em differentes planos; serão parallelas entre si.*

Sejão, *fig.* 112, as rectas *AB*, e *CD* parallelas a *EF*; e não estejão as tres no mesmo plano: digo que *AB* he parallela a *CD*.

Demonstr. Por hum ponto qualquer *G* da reca *EF* se faça passar hum plano *HGI* perpendicular a *EF* (202): serão *AB*, e *CD* perpendiculares a esse plano, por serem parallelas a *EF* (204); e por conseguinte parallelas entre si (205).

207. *Coroll.* Logo se huma recta *EF*, situada fóra de hum plano, for parallela a huma outra qualquer *AB*, tirada nesse plano; ella o não poderá encontrar, por mais que se continue. Porque se acaso *EF* encontrasse o plano, em que existe *AB*, em algum ponto delle; por esse mesmo ponto, e no mesmo plano tirar-se-hia huma outra recta parallela a *AB*; e esta seria tambem parallela a *EF*: o que he manifesto absurdo.

208. THEOR. *Se dous angulos, que tem os lados parallelos, ainda que situa-*

tuados em differentes planos, tiverem as suas aberturas voltadas para a mesma parte; ou hum delles, e o verticalmente opposto ao outro; os ditos angulos serão iguaes.

Sejão, *fig.* 114, os angulos *ABD*, e *ECF*, situados, cada hum no seu plano; cujas aberturas estão voltadas para a mesma parte; e sejão parallelos os lados *BA*, e *CE*; *BD*, e *CF*: digo que *ABD* = *ECF*.

Demonstr. Façáo-se iguaes as rectas *BA*, *BD*, *CE*, e *CF*; e tirem-se *BC*, *AD*, *EF*, *AE*, e *DF*. Pois he *AB* =, e parallela a *CE*; será *BC* =, e parallela a *AE* (99): e tambem, pois he *BD* =, e parallela a *CF*, será *BC* =, e parallela a *DF*: logo será *AE* =, e parallela a *DF* (206); e por isso *AD* = *EF*. Logo os triangulos *ABD*, e *ECF* são iguaes (92); e por tanto iguaes os angulos *ABD*, e *ECF*.

A respeito dos que tendo os lados parallelos, não tem as suas aberturas voltadas para a mesma parte; he facil de ver que são iguaes, se hum delles, e o verticalmente opposto ao outro estão voltados para a mesma parte; discorrendo, como em o *n.*° 63.

Dos

Dos planos considerados nas differentes posições, que podem ter huns a respeito dos outros.

209. Similhantemente ao que dissemos a respeito das linhas, quando concorrião em hum ponto, se diz que dous planos, quando concorrem, fazem entre si angulo. Mas para differençarmos estes daquelles, chamaremos tambem *angulo plano*, ou *angulo* simplesmente, ao que he formado por duas linhas rectas; e *angulo diedro*, ao angulo formado por dous planos.

Démos o nome de *vertice* no angulo plano ao ponto do concurso das linhas, e a estas o de *lados*: daremos o de *aresta* no angulo diedro á recta, em que os planos concorrem; e a estes o de *faces*. Assim os dous planos *CA*, e *CD*, *fig.* 114, que concorrem na recta *BC*, fazem o angulo diedro *ABCD*, cuja aresta he *BC*; e as faces, os planos *CA*, e *CD*.

210. THEOR. *Se, em dous angulos diedros, tirando por hum ponto qualquer da aresta de cada hum delles duas per-*

perpendiculares á dita aresta, cada huma em sua face, for o angulo, formado por essas duas perpendiculares no primeiro, igual ao angulo, formado pelas outras dùas no segundo; os dous angulos diedros serão iguaes.

Sejão, *fig.* 114, os angulos diedros *ABCD*, e *abcd*; e seja o angulo *IGH*, formado pelas perpendiculares *GI*, e *GH* tiradas do ponto *G* a aresta *BC*, cada huma em sua face, igual ao angulo *igh*, formado pelas perpendiculares *gi*, e *gh* tiradas do ponto *g* a aresta *bc*, cada huma em sua face: digo que o angulo diedro *ABCD* = o angulo diedro *abcd*.

Demonstr. Applique-se o ponto *g* sobre o ponto *G*; e ajustando a aresta *bc* sobre a aresta *BC*, e fazendo coincidir as faces *cd*, e *CD*, a recta *gh* se ajustará com a recta *GH*, por serem rectos os angulos *cgh*, e *CGH*, por construcção: e pois he o plano *igh* perpendicular a *gc* (192); e da mesma sorte o plano *IGH* perpendicular a *GC*; estes dous planos coincidiráõ; por quanto, não succedendo assim, teriamos por hum mesmo ponto *G* de huma recta conduzido dous planos perpendiculares a essa recta; o que não póde

de ser (199). Logo a recta *gi* se ajustará com a recta *GI*, por ser o angulo *igh* = o angulo *IGH* por hypothese; e por conseguinte ajustando-se as rectas *gc*, e *gi* com as rectas *GC*, e *GI*; tambem se ajustaráõ os seus respectivos planos, isto he, as faces *ca*, e *CA*: mas já tinhamos feito ajustarem-se as faces *cd*, e *CD*; logo os angulos diedros *ABCD*, e *abcd* se ajustaráõ perfeitamente: logo elles são iguaes.

211. *Coroll.* Segue-se pois: que dividindo o angulo *IGH* em quantas partes iguaes quizermos; e tirando pela aresta *BC*, e por cada huma dessas divisões outros tantos planos; ficará o angulo diedro *ABCD* dividido tambem em outros tantos angulos diedros iguaes entre si. E concluir-se-ha, discorrendo, como no *n.°* 16: que está o angulo *IGH* para o angulo diedro *ABCD*, como hum numero qualquer daquellas partes de *IGH* para o mesmo numero d'estoutras partes de *ABCD*.

212. THEOR. *Os angulos diedros estão entre si, como os angulos formados em cada hum delles pelas perpendiculares*

res ás suas arestas, tiradas de hum mesmo ponto destas, cada huma em sua face.

Sejão, *fig.* 114, e 115, os angulos diedros *ABCD*, e *abcd*; e sejão os angulos *IGH*, e *igh* formados pelas perpendiculares *GI*, e *GH* respectivamente a *BC* no ponto *G*; e *gi*, e *gh* respectivamente a *bc* no ponto *g*; cada huma em sua face: digo que *ABCD* : *abcd* : : *IGH* : *igh*.

Demonstr. Prova-se por hum raciocinio em tudo similhante ao do *n.°* 17.

213. *Coroll.* 1.° Pois os angulos formados pelas perpendiculares ás arestas dos angulos diedros, tiradas de hum mesmo ponto qualquer destas, cada huma em sua face, são proporcionaes aos mesmos angulos diedros; segue-se que podemos representar estes por aquelles: e assim os angulos diedros gozão de todas as propriedades dos angulos planos: por ex.

Hum plano, que cahe sobre outro plano, fórma com este, produzido, se for necessario, dous angulos, cada hum da sua parte, que juntos valem 180.°

Se estes angulos são iguaes, isto he, cada hum de 90°; o plano incidente se diz

diz ser *perpendicular*: se desiguaes, *obliquo*, ou *inclinado*.

214. *Coroll.* 2.° Logo se hum plano for perpendicular a outro, tambem este o será a respeito daquelle.

215. *Coroll.* 3.° Por huma mesma recta, situada em hum plano, não se podem conduzir dous planos perpendiculares a ess'outro.

216. THEOR. *Se huma recta, sendo perpendicular á intersecção de dous planos, que fazem entre si angulo recto, for ao mesmo tempo perpendicular a hum delles; ella estará situada no outro. E reciprocamente: se estiver situada em hum; ella será perpendicular ao outro.*

Seja, *fig.* 111, *DE* a secção commum dos dous planos *AB*, e *DEI*, perpendiculares entre si; e seja *CH* perpendicular ao plano *AB* no ponto *C* da dita intersecção *DE*: digo que *CH* estará situada no plano *DEI*.

Demonstr. Tire-se no plano *AB* a recta *CF* perpendicular a *DE* no ponto *C*: e se acaso *CH* não está no plano *DEI*, nelle esteja *CI* perpendicular a *DE* no ponto *C*: teremos que, pois o plano

DEI

DEI he perpendicular, por hypothese, ao plano *AB*, será o angulo *ICF* recto (213); e por consequencia *CI* perpendicular a *CF*: logo *CI*, perpendicular ás duas *CF*, e *DE*, he tambem perpendicular ao plano *AB* (192); e por tanto teremos levantado do mesmo ponto *C* duas perpendiculares a esse plano: o que he absurdo (193). Logo, &c.

Ao mesmo tempo fica demonstrada a reciproca.

217. *Coroll.* 1.° He pois hum plano *DEI* perpendicular a outro *AB*, quando aquell'outro passa por huma recta *CH* perpendicular a est'outro. Com effeito não se póde por *DE* tirar hum plano perpendicular ao plano *AB*, em que não esteja *CH*.

218. *Coroll.* 2.° A intersecção *IL*, *fig.* 116, de dous planos *CD*, e *EF*, perpendiculares a hum terceiro *AB*, he perpendicular ao mesmo terceiro. Porque a perpendicular, levantada do ponto *L* ao plano *AB*, não póde ser outra, senão a mesma intersecção, visto que deve existir ao mesmo tempo em ambos os planos *CD*, e *EF*.

219. *Coroll.* 3.° Logo por huma mesma recta, que não he perpendicular a hum

hum plano, não se podem conduzir dous planos perpendiculares a ess'outro. Porque então essa recta seria perpendicular ao dito plano; o que he contra supposto.

220. Chamão-se *planos parallelos* aquelles, que nunca se podem encontrar, por mais que se continuem de huma, e outra parte.

221. THEOR. *Se dous planos forem parallelos, e for huma recta perpendicular a hum delles; será a mesma recta tambem perpendicular ao outro; produzida, sendo necessario.*

Sejão, *fig.* 117, os planos parallelos *AB*, e *CD*; e seja *EF* perpendicular ao plano *AB*: digo que *EF* he tambem perpendicular ao plano *CD*.

Demonstr. Não seja *EF* perpendicular ao plano *CD*; e seja *FG* huma recta nelle tirada, obliqua a *EF*: conduza-se por *EF*, e por *FG* hum plano *EFG*, o qual encontrará o plano *AB* em huma recta *EH*: será *EF* perpendicular a *EH*, por ser *EF*, por hypothese, perpendicular ao plano *AB*: mas nós temos que no mesmo plano *HEFG* he *EF* obliqua a *FG*; lo-

logo *FG*, e *EH* prolongadas concorreráõ (59); e por conseguinte tambem devem concorrer os planos *AB*, e *CD*, em que ellas estão (188): o que he contra a hypothese. Logo, &c.

222. *Coroll.* Dous planos *AB*, e *CD*, perpendiculares a huma mesma recta *EF*, são parallelos entre si. Com effeito, o plano, que pelo ponto *F* se tirasse parallelo a *AB*, seria perpendicular a *EF*: e pois por hum mesmo ponto de huma recta não se póde conduzir mais do que hum plano perpendicular a essa recta(199); esse plano parallelo seria o mesmo plano *CD*.

223. THEOR. *Se duas parallelas forem cortadas por dous planos parallelos; as partes interceptas serão iguaes entre si.*

Sejão, *fig.* 118, as parallelas *EH*, e *GF*, cortadas pelos planos parallelos *AB*, e *CD*: digo que $EH = GF$.

Demonstr. Tirem-se as rectas *EG*, e *HF*, que são as intersecções do plano das parallelas com os dous planos parallelos: e pois estas intersecções são tambem parallelas, porque, não o sendo, con-

correrião em hum ponto, e então necessariamente tambem concorrerião os planos *AB*, e *CD*, em que ellas estão, o que he contra a hypothese; logo será *EH* = *GF* (98).

224. *Schol.* 1.° « Incidentemente fica » demonstrado: que as intersecções de » dous planos parallelos com hum ter- » ceiro, são parallelas entre si. »

225. *Schol.* 2.° « Dous planos paral- » lelos, cortados por hum terceiro, tem » as mesmas propriedades a respeito dos » angulos diedros, que fazem com o di- » to terceiro, que tem duas rectas pa- » rallelas a respeito dos angulos, que fa- » zem com a sua secante. He conse- » quencia do que fica dito (213). »

226. THEOR. *Se duas rectas, que fazem hum angulo em hum plano, forem parallelas a outras duas rectas, que fazem outro angulo em outro plano; será o plano, determinado pelas duas primeiras, parallelo ao plano determinado pelas duas outras.*

Sejão, *fig.* 119, os angulos *ABC*, e *DEF*, cada hum no seu plano; e seja a recta *AB* parallela a *DE*; e *BC* para-

rallela a *EF*: digo que o plano *ABC* he parallelo ao plano *DEF*.

Demonstr. Abaixe-se do ponto *B* huma perpendicular *BG* sobre o plano *DEF* (201); e pelo ponto *G* tirem-se neste mesmo plano as rectas, *GH* parallela a *DE*, e *GI* parallela a *EF*: será tambem *AB* parallela a *GH*, e *BC* parallela a *GI* (206): mas he *BG* perpendicular ás rectas *GH*, e *GI*, porque o he por construcção ao plano *DEF*; logo tambem *BG* será perpendicular ás rectas *AB*, e *BC* (57); e por conseguinte ao plano *ABC*. Logo o plano *ABC* he parallelo ao plano *DEF* (222).

227. PROBL. *Dado hum plano, e hum ponto fóra delle, tirar por esse ponto hum outro plano parallelo ao primeiro.*

Seja, *fig.* 119, *DEF* o plano; *B*, o ponto.

Solução. Tirem-se no dito plano duas rectas quaesquer *DE*, e *EF*, que façáo angulo; e pelo ponto *B* no plano *BED* a recta *BA* parallela a *ED*; e no plano *BEF* a recta *BC* parallela a *EF*: digo que o plano *ABC* determinado por

estas duas rectas *AB*, e *BC* he parallelo ao plano *DEF* (226).

228. THEOR. *Se de hum mesmo ponto, tomado fóra de hum plano, se tirarem rectas para differentes pontos desse plano; e essas rectas se cortarem por hum segundo plano parallelo ao primeiro; ficarão as ditas rectas cortadas proporcionalmente. E não serão assim cortadas, se o dito segundo plano não for parallelo ao primeiro.*

Seja, *fig.* 120, o plano *GE*; e do ponto *I*, tomado fóra, se tirem para os pontos *K*, *L*, *M* deste plano as rectas *IK*, *IL*, *IM*, que se cortem pelo plano *ge*, parallelo a *GE*, nos pontos *k*, *l*, *m*: digo que *IK*, *IL*, *IM*, estão cortadas proporcionalmente; isto he, *IK* : *Ik* :: *IL* : *Il* :: *IM* : *Im*.

Demonstr. Tirem-se as rectas *kl*, e *KL*; *lm*, e *LM*; *km*, e *KM*: e pois estas são as intersecções dos planos parallelos *ge*, e *GE* com cada hum dos planos *IKL*, *ILM*, *IKM*; serão parallelas *kl*, e *KL*; *lm*, e *LM*; *km*, e *KM* (224): e por tanto teremos *IK* : *Ik* :: *IL* : *Il* :: *IM* : *Im* (108); isto he,

as

as rectas *IK*, *IL*, *IM*, estão cortadas proporcionalmente.

Quanto á segunda parte; facilmente se deduz do que acabamos de demonstrar; discorrendo como em o *n.°* 108: e tiraremos igualmente Corollarios analogos; isto he: que (reciprocamente) se taes rectas estiverem cortadas proporcionalmente; os pontos, em que o estiverem, estarão em hum mesmo plano parallelo ao primeiro.

229. *Schol.* « Por ser tambem *IK* : *Ik* : : *KL* : *kl* : : *IL* : *Il* : : *LM* : *lm* : : *IM* : *Im* : : *Km* : *km*; e por isso *KL* : *kl* : : *LM* : *lm* : : *KM* : *km*; os dous triangulos *KLM*, e *klm* serão similhantes (119). E o mesmo se dirá de outras quaesquer figuras *ABCDF*, e *abcdf*, quando são mais de tres as rectas conduzidas do ponto *I* para estes planos. Porque, tirando dos pontos correspondentes *a*, e *A*, em cada huma das figuras, as diagonaes *ac*, e *AC*; *ad* e *AD*, &c., concluir-se-ha do mesmo modo a similhança dos triangulos *ABC*, e *abc*; *ACD*, e *acd*, &c.; e por consequencia a das duas figuras (153). »

Dos

Dos angulos solidos.

230. He facil de conceber, que, se tres, ou mais planos, concorrendo dous a dous, fizerem tres, ou mais angulos diedros, cujas arestas concorrão todas em hum mesmo ponto, ellas reuniráõ nesse ponto outros tantos angulos planos, que terão todos o mesmo vertice, e a dous, e dous hum lado commum.

A esta reunião de tres, ou mais angulos planos concurrentes em hum ponto, e existentes, cada hum no seu plano, he que se dá o nome de *angulo solido*, ou mais propriamente de *angulo polyedro*. Se he formado por tres angulos planos, isto he, se tem só tres faces, chama-se *angulo triedro*: se quatro, *angulo tetraedro*: &c.

O ponto do concurso dos angulos planos, que formão hum angulo polyedro, tambem se diz *vertice* delle; assim como tambem *arestas* delle, as arestas dos angulos diedros, que o torneão.

Hum angulo polyedro, qualquer, se nomêa, lendo em primeiro lugar a letra, que marca o seu vertice, e depois as que designão cada huma das suas arestas. Por ex. para nomearmos o angulo triedro, *fig.* 121,

121, cujo vertice he D, diremos o angulo triedro $DABC$.

Seis pois são as cousas, que se distinguem em hum angulo triedro; a saber: tres angulos planos, e tres angulos diedros.

231. THEOR. *Dos tres angulos planos, que formão hum angulo triedro, a somma de quaesquer dous he maior do que o terceiro.*

Seja, *fig.* 121, o angulo triedro $DABC$, formado pelos tres angulos planos ADC, CDB, e ADB: digo que a somma de quaesquer dous, isto he, $ADC + ADB > CDB$.

Demonstr. Sejão os tres angulos desiguaes; e seja CDB o maior. Tire-se no plano deste a recta DE, de modo que seja o angulo $CDE = ADC$; e fazendo $DE = DA$, tirem-se as rectas CEB, AC, e AB: os triangulos ADC, e CDE serão iguaes (87); e por tanto $AC = CE$: mas he $AC + AB > BC$, isto he, $AC + AB > CE + BE$; se tirarmos de huma, e outra parte as linhas iguaes AC, e CE; ficará $AB > BE$: mas nos triangulos ADB, e EDB, por ser DB commum, $DE = DA$ por construcção, e $AB > BE$, he o angulo ADB

$>$

$> EDB$ (94); será a somma dos angulos CDE, e ADB tambem maior que a dos angulos CDE, e EDB; isto he, $ADC + ADB > CDB$, por ser $CDE = ADC$ por construcção.

Quando os tres angulos planos são iguaes, ou quando, sendo desiguaes, entra na somma dos dous o maior de todos os tres; he evidente que, em ambos os casos, será essa somma maior, do que o terceiro.

232. THEOR. *A somma de todos os angulos planos, que formão hum angulo polyedro convexo; isto he, em que não ha angulo diedro reintrante; he sempre* $< 360.°$

Seja, *fig.* 122, o angulo polyedro convexo $ABCDE$: digo que a somma de todos os angulos planos, que o compoem, isto he, $BAE + EAD + DAC + BAC < 360°$.

Demonstr. Tire-se hum plano qualquer $BCDE$, que encontre todos os outros planos, ou faces do angulo polyedro proposto: formarão as secções desse plano com cada huma das ditas faces hum polygono $BCDE$; e farão das mesmas faces outros tantos triangulos. Isto posto,

co-

como a somma de dous angulos planos quaesquer he maior, do que o terceiro; em cada hum dos angulos triedros, cujos vertices são B, C, D, E, será $ABE + ABC > CBE$; $BEA + AED > BED$; $EDA + ADC > EDC$; $DCA + ACB > BCD$; e por conseguinte, sommando todos os angulos, que estão de hum lado, e por ordem aos que pertencem a hum mesmo triangulo; virá $(ABE + BEA) + (AED + EDA) + (ADC + DCA) + (ABC + ACB) > CBE + BED + EDC + BCD$, que he a somma de todos os angulos do polygono. Logo será a somma dos supplementos de cada dous desses angulos de cada triangulo, isto he, a somma de todos os angulos planos, que formão o angulo polyedro, menor que a somma dos supplementos de todos os angulos do polygono, a qual he 360° (138). Logo &c.

233. *Coroll.* Não pois quaesquer tres angulos planos formaráõ hum angulo polyedro, se a somma de quaesquer dous for $=$, ou $<$ o 3.°; e a somma de todos $=$, ou $>$ 360.°

234. THEOR. *Se, em dous angulos trie-*

triedros, forem os tres angulos planos, que formão hum, iguaes aos tres angulos planos, que formão o outro, cada hum a cada hum; serão os angulos diedros, formados pelos planos dos angulos iguaes, tambem respectivamente iguaes.

Sejão, *fig.* 121 *, os angulos triedros *DABC*, e *dabc*; e sejão os angulos planos do primeiro *ADC*, *CDB*, e *BDA* respectivamente iguaes aos angulos planos do segundo *adc*, *cdb*, e *bda*: digo que serão iguaes os angulos diedros *ADCB*, e *adcb*; *CDBA*, e *cdba*; *CDAB*, e *cdab*.

Demonstr. Fação-se iguaes as arestas *DA*, *DB*, *DC*, *da*, *db*, *dc*; e tirem-se as rectas *AB*, *AC*, *BC*, *ab*, *ac*, *bc*. He facil de reconhecer a igualdade dos triangulos isosceles *ADB*, e *adb*; *ADC*, e *adc*; *CDB*, e *cdb* (87). Logo serão agudos, e iguaes os angulos *DAB*, e *dab*; *DAC*, e *dac*, &c.; e $AB = ab$; $AC = ac$; $BC = bc$: e por tanto o triangulo *ABC* igual ao triangulo *abc* (92). Isto posto; nas arestas communs a dous angulos planos respectivamente iguaes, por ex. nas arestas *DA*, e *da* tomem-se iguaes as partes *AG*, e *ag*: e concebão-se nos pontos *G*, e *g* dous planos perpen-

pendiculares a essas arestas; a saber, o plano *HGF* á aresta *DA*, o qual necessariamente encontrará as rectas *AB*, e *AC*; e o plano *hgf* á aresta *da*, o qual tambem encontrará as rectas *ab*, e *ac*: serão os triangulos *AGF*, e *AGH* rectangulos em *G* (192), assim como o serão em *g* os triangulos *agf*, e *agh*: por isso, e por ser $AG = ag$ por construcção; e serem iguaes os angulos *DAB*, e *dab*; *DAC*, e *dac*; serão iguaes os triangulos *AGF*, e *agf*; *AGH*, e *agh* (90); e logo $AF = af$; $GF = gf$; $AH = ah$; $HG = hg$; donde, e de ser o angulo *BAC* = o angulo *bac*, pela igualdade já mostrada dos triangulos *ABC*, e *abc*, se concluirá que são iguaes os triangulos *AFH*, e *afh* (87); e por conseguinte $HF = hf$. Logo os triangulos *HFG*, e *hfg* serão tambem iguaes, (92), e por tanto iguaes os angulos *HGF*, e *hgf*, que medem os angulos diedros *CDAB*, e *cdab* (210). Logo estes são iguaes.

Do mesmo modo se mostrará a igualdade respectiva dos outros.

235. THEOR. *Se, em dous angulos triedros, forem os tres angulos planos, que formão hum, iguaes aos tres angulos planos,*

nos, que formão o outro, cada hum a cada hum, e similhantemente dispostos; os dous angulos triedros serão iguaes.

Sejão, *fig.* 121, os angulos triedros *DABC*, e *dabc*; e sejão os angulos planos do primeiro *ADC*, *CDB*, e *BDA* respectivamente iguaes aos angulos planos do segundo *adc*, *cdb*, e *bda*, e similhantemente dispostos: digo que o angulo triedro *DABC* = o angulo triedro *dabc*.

Demonstr. Conceba-se applicado o ponto *d* sobre o ponto *D*, e a aresta *da* sobre a aresta *DA*; e fação-se coincidir as faces *adc*, e *ADC*: cahirá a aresta *dc* sobre a aresta *DC*, por ser o angulo plano *adc* = o angulo plano *ADC*, por hypothese; e a face *cdb* sobre a face *CDB*, por ser o angulo diedro *adcb* = o angulo diedro *ADCB* (234); e a aresta *db* sobre a aresta *DB*, por ser o angulo plano *cdb* = o angulo plano *CDB*, tambem por hypothese. Logo a face *adb*, determinada pelas arestas *ad*, e *db*, confundir-se-ha tambem com a face *ADB*; e por conseguinte se ajustaráõ perfeitamente os angulos triedros *DABC*, e *dabc*. Logo elles são iguaes.

TER-

TERCEIRA SECÇÃO.

Dos corpos.

236. NÃo sendo os corpos geometricos outra cousa mais, que certos volumes terminados deste, ou daquelle modo, por huma, ou mais superficies; resulta daqui que elles não appresentão todos o mesmo aspecto, isto he, a mesma figura.

Consideraremos unicamente nesta Secção os corpos, ou volumes terminados por superficies planas; e entre os, que são terminados por superficies curvas, só trataremos daquelles, cuja figura, ou os mesmos corpos, tem o nome de *pyramide conica*, de *cylindro*, e de *sphéra*.

Os volumes terminados por superficies planas formão os corpos, que se chamão *corpos polyedros*, ou *polyedros* simplesmente; e essas superficies se dizem *faces* dos corpos: e não menos de quatro podem fechar volume, isto he, formar hum corpo.

237.

237. Tem geralmente o nome de *pyramide* todo o polyedro, em que huma das faces, que se chama *base*, póde ser hum polygono qualquer; e todas as mais faces são triangulos, que tem por bases os lados desse polygono, e todos tem hum vertice commum, que tambem se diz *vertice* da *pyramide*.

A perpendicular, tirada do vertice sobre o plano da base, chama-se *altura* da pyramide.

As pyramides tomão differentes nomes da figura das suas bases: por ex., se a base he hum triangulo, chama-se *pyramide triangular*, ou *tetraedro* simplesmente: *fig.* 121. Se hum quadrilatero, *pyramide quadrangular*: *fig.* 122; &c. E se a base he hum polygono regular, e a perpendicular tirada do vertice, isto he, a sua altura, cahe no centro desse polygono; diz-se que a pyramide he *regular*: *fig.* 123.

238. THEOR. *Em qualquer pyramide regular as faces, que terminão no vertice, são todas triangulos isosceles, e iguaes.*

Seja, *fig.* 123, a pyramide regular *ABCDE*, cujo vertice *A*: digo que as fa-

faces *BAC*, *CAD*, &c. são triangulos isosceles, e iguaes.

Demonstr. Com effeito, por ser regular o polygono da base, serão iguaes as arestas *AB*, *AC*, *AD*, &c. (196); como tambem iguaes os lados *BC*, *CD*, *DE*, &c.: logo serão isosceles (68), e iguaes (92) os triangulos *BAC*, *CAD*, &c.

239. *Coroll.* São pois iguaes entre si as perpendiculares tiradas do vertice da pyramide regular sobre cada hum dos lados da base: e estas chamão-se *apothemas* da pyramide.

240. Toda a secção feita em huma pyramide por hum plano parallelo ao da base, he huma figura similhante á da dita base (229).

A porção da pyramide comprehendida entre aquella secção, e a dita base, chama-se *tronco* da pyramide, ou *pyramide truncada*: a mesma secção tambem se diz *base*: e he facil de ver que as mais faces do tronco são todas trapezios; e estes iguaes, se elle he tronco de pyramide regular.

241. O polyedro, em que ha duas faces oppostas iguaes, e parallelas, que se chamão *bases*, e todas as mais faces são parallelogrammos, tem indistincta-

men-

mente o nome de *prisma*: *fig.* 124, 125, 126, 127.

A sua altura he a perpendicular tirada de hum ponto qualquer de huma das bases sobre o plano da outra base.

Diz-se que hum prisma he *recto*, quando a aresta he perpendicular á base; e por consequencia igual á altura (205, e 223): *fig.* 125, e 126: e *obliquo*, quando assim não he: *fig.* 124, e 127.

Tomão tambem os prismas differentes nomes da figura das suas bases: por ex., se a base he hum triangulo, chama-se *prisma triangular*: *fig.* 124. Se hum quadrilatero, *prisma quadrangular*: *fig.* 127; &c. Se hum parallelogrammo, *parallelipipedo.* Se hum rectangulo, e o prisma he recto, *parallelipipedo rectangulo*: *fig.* 125. Se hum quadrado, e o prisma he recto, e a aresta igual ao lado desse quadrado, *cubo*: *fig.* 126.

242. THEOR. *Toda a secção, feita em hum prisma por hum plano parallelo ao da base, he huma figura igual á da dita base.*

Seja, *fig.* 124, o prisma *ABDF*; e *bdf* a secção feita por hum plano paral-

le-

lelo ao da base: digo que a figura *bdf* he igual á figura *BDF*.

Demonstr. Pois são parallelas as secções respectivas de cada hum dos planos parallelogrammos *AD*, *DE*, *EB*, com os planos parallelos *DBF*, e *dbf*; isto he, *bd* parallela a *BD*; *df* a *DF*; &c. (224); serão iguaes *bd* a *BD*; *df* a *DF*; &c. (98); e iguaes os angulos *BDF*, e *bdf*, &c. (208): logo as figuras *bdf*, e *BDF* se podem perfeitamente ajustar; e por tanto são iguaes.

243. O volume terminado por hum circulo, e por huma superficie, na qual todas as rectas, tiradas da circunferencia desse circulo, concorrem em hum mesmo ponto, fórma o corpo, que se chama *pyramide conica*: *fig.* 128, e 129.

Esse ponto he o *vertice*: o circulo, *base*: e se a recta, que prende o vertice, e o centro da base, he perpendicular a esta; a pyramide conica se diz ser *recta*: *fig.* 128: e obliqua, no caso contrario: *fig.* 129.

A recta, tirada do vertice para hum ponto qualquer da circunferencia da base, chama-se *lado*: para o centro, *eixo*: e perpendicular á base, *altura*.

A pyramide conica recta póde tam-

bem considerar-se, como gerada pela revolução inteira de hum triangulo rectangulo *ABC*, *fig.* 128, ao redor de hum dos lados do angulo recto *AC*, supposto immovel.

244. THEOR. *Toda a secção, feita em huma pyramide conica por hum plano parallelo ao da base, he sempre hum circulo.*

Seja, *fig.* 129, a pyramide conica *ABDE*: digo que a secção feita pelo plano *bde* parallelo ao da base, he hum circulo.

Demonstr. Imagine-se o eixo *AC*; e tomem-se no contorno da dita secção quaesquer pontos *b*, *e*, *d*, &c.: tirem-se por elles, e pelo vertice *A*, as rectas *AB*, *AE*, *AD*, &c.; e os raios *CB*, *CE*, *CD*, &c.; e as rectas *cb*, *ce*, *cd*, &c.: será *AB* : *Ab* : : *CB* : *cb* : : *AE* : *Ae* : : *CE* : *ce* : : *AC* : *Ac* : : *CD* : *cd* : : &c. (229); e logo *CB* : *cb* : : *CE* : *ce* : : *CD* : *cd* : : &c.: mas he *CB* = *CE* = *CD* = &c.; logo tambem *cb* = *ce* = *cd* = &c.; o que mostra que a dita secção he hum circulo.

A porção da pyramide conica, compre-

prehendida entre aquella secção, e a base, tem o nome de *tronco*, ou de *pyramide conica truncada.*

245. O volume terminado por dous circulos iguaes, e parallelos, e por huma superficie, na qual todas as rectas, tiradas de huma dessas circunferencias para a outra, são parallelas entre si, fórma o corpo, que se chama *cylindro*: *fig.* 130, e 131.

Qualquer desses circulos he *base*: e se a recta, que prende os seus centros, lhes he perpendicular; o cylindro se diz ser *recto*: *fig.* 130: e *obliquo*, no caso contrario: *fig.* 131.

A recta, tirada de hum ponto qualquer de huma dessas circunferencias para a outra, na superficie do cylindro, chama-se *lado*: a que prende os centros das bases, *eixo*: e a que he perpendicular a estas, *altura.*

O cylindro recto póde tambem considerar-se, como gerado pela revolução inteira de hum rectangulo *ABC'C*, *fig.* 130, ao redor de hum dos seus lados *CC'*, supposto immovel.

246. O volume terminado por huma unica superficie, na qual todos os pontos estão igualmente distantes de hum outro

ponto existente dentro delle volume, fórma o corpo, que se chama *sphéra.*

Esse ponto se diz *centro*: as rectas tiradas delle para a superficie, *raios*: e a que passa pelo centro, e termina de huma, e outra parte na superficie, *diametro.*

Tambem a sphéra póde-se considerar, como gerada pela revolução inteira de hum semi-circulo *CADB*, *fig.* 132, ao redor do diametro *AB*, supposto immovel. Este diametro chama-se *eixo.*

247. THEOR. *Se hum plano, tendo de commum hum ponto com a superficie de huma sphéra, prolongado a não cortar; só terá de commum esse ponto com a dita superficie* : (*e se dirá que he* tangente). *E se prolongado a cortar; terá então de commum a circunferencia de hum circulo; e o maximo será, quando o plano passar pelo centro da sphéra.*

Demonstr. 1.° Se he possivel, tenha hum plano dous pontos communs com a superficie de humas phéra, de modo que, prolongado, a não corte: imaginem-se raios tirados a esses pontos: qualquer delles será maior que a perpendicular abai-

xa-

xada do centro da sphéra sobre o dito plano (197); e por consequencia terá este hum ponto dentro da sphéra: o que he contra supposto. Logo &c.

Quanto á 2.ª parte; facilmente se demonstra pelo *n.°* 195, imaginando raios a todos os pontos da secção.

248. *Coroll.* Logo a menor recta, que do centro de huma sphéra se póde tirar a hum plano tangente, he o raio, que vai ao ponto do contacto: por conseguinte será o dito plano perpendicular a esse raio (197); e por isso o unico, que he tangente nesse ponto (199).

249. PROBL. *Dada huma sphéra, achar o seu diametro.*

Seja, *fig.* 133, a sphéra *ABDEF*.

Solução. Tome-se nella hum ponto qualquer *A*; e por meio de hum compasso curvo, fazendo centro em *A*, e com huma abertura qualquer *AD*, se descreva o circulo menor *DFEG*: marque-se na circunferencia deste qualquer ponto *D*; e com intervallos iguaes para huma, e outra parte, os pontos *F*, e *G*: com as cordas *DF*, *DG*, *FG* tomadas entre as pontas

tas do compasso, se construa á parte o triangulo isosceles FDG, de cujo vertice D se abaixe sobre a base FG huma perpendicular indefinida; e de hum dos pontos F, ou G, por ex., de F, se levante sobre DF a perpendicular FE: será $DE =$ o diametro do circulo menor descripto sobre a sphéra. Com DE, e as cordas AD, e AE iguaes, se construa outro triangulo isosceles $A'D'E'$: de A' se abaixe sobre a base $D'E'$ huma perpendicular indefinida; e de D' sobre $A'D'$ se levante a perpendicular $D'B'$: digo que $A'B'$ he $=$ o diametro da sphéra dada.

250. A porção de huma sphéra, que he cortada por hum plano, chama-se *segmento spherico*: consideraremos porém só os segmentos menores, que hum hemispherio.

O circulo, que resulta da secção desse plano, he a *base*; e a *altura* he a parte intercepta do raio da sphéra, que passa pelo centro dessa base.

O segmento spherico póde tambem considerar-se, como gerado pela revolução inteira de hum semi-segmento de circulo, por ex., DAF, *fig.* 132, ao redor da porção immovel AF do raio CA.

A

A superficie, que neste movimento descreve o arco *AD*, tem o nome de *zona.*

251. *Sector spherico* he o corpo, que se compõe de huma pyramide conica recta, cujo lado he raio de huma sphéra; e de hum segmento desta, da mesma base da pyramide, unidos perfeitamente por ellas.

Tambem o sector spherico póde considerar-se, como gerado pela revolução inteira de hum sector de circulo, por ex., *CAD*, *fig.* 132, ao redor do raio *CA*, supposto immovel.

De alguns casos da igualdade dos tetraedros.

252 THEOR. *Se, em dous tetraedros, forem duas faces de hum iguaes a duas faces do outro, cada huma a huma, e similhantemente dispostas; e iguaes os angulos diedros, formados por essas duas faces em cada hum dos tetraedros; os dous tetraedros serão iguaes.*

Sejão, *fig.* 121, os tetraedros *DABC*, e *dabc*; e sejão as faces *ADC*, e *CDB* do

do primeiro respectivamente iguaes ás faces *adc*, e *cdb* do segundo, e similhantemente dispostas; e o angulo diedro *ADCB* = o angulo diedro *adcb*: digo que o tetraedro *DABC* he igual ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Ajustem-se os dous angulos diedros, pondo, por ex., o segundo sobre o primeiro, de modo que o ponto *d* fique sobre o ponto *D*: então o ponto *a* cahirá sobre o ponto *A*; o ponto *c* sobre o ponto *C*; e o ponto *b* sobre o ponto *B*; pela igualdade das faces *ADC*, e *adc*; *CDB*, e *cdb*. Logo tambem a face *adb* se ajustará com a face *ADB*; e a face *abc* com a face *ABC*; e os tetraedros se confundiráõ. Logo elles sáo iguaes.

253. THEOR. *Se, em dous tetraedros, forem tres faces, que formão hum angulo triedro em hum, iguaes a tres faces, que formão hum angulo triedro no outro, cada huma a cada huma, e similhantemente dispostas; os dous tetraedros serão iguaes.*

Sejão, *fig.* 121, os tetraedros *DABC*, e *dabc*; e sejão as tres faces do primeiro

ro *ADC*, *CDB*, e *BDA*, que formão o angulo triedro em *D*, respectivamente iguaes ás tres faces do segundo *adc*, *cdb*, e *bda*, que formão o angulo triedro em *d*, e similhantemente dispostas: digo que o tetraedro *DABC* he igual ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Com effeito, pois os dous angulos triedros são formados por angulos planos respectivamente iguaes, e similhantemente dispostos, segundo a hypothese; os dous angulos triedros se ajustaráõ (235). Ajustem-se pois, pondo, por ex., o segundo sobre o primeiro: o ponto *a* cahirá no ponto *A*; o ponto *c* no ponto *C*; e o ponto *b* no ponto *B*; pela dita igualdade das faces. Logo tambem a face *abc* se ajustará com a face *ABC*; e os tetraedros se confundiráõ. Logo elles são iguaes.

254. THEOR. *Se, em dous prismas, forem tres faces, que formão hum angulo triedro em hum, iguaes a tres faces, que formão hum angulo triedro no outro, cada huma a cada huma, e similhantemente dispostas; os dous prismas serão iguaes.*

Se-

Sejão, *fig.* 134, os prismas *AH*, e *ah*; e sejão as tres faces do primeiro *AL*, *EI*, e *ABCDE*, que formão o angulo triedro em *E*, respectivamente iguaes ás tres faces do segundo *al*, *ei*, e *abcde*, que formão o angulo triedro em *e*, e similhantemente dispostas: digo que o prisma *AH* he igual ao prisma *ah*.

Demonstr. Ajustados os angulos triedros em *E*, e *e* (235); as faces iguaes *AL*, e *al*; *EI*, e *ei*; e *ABCDE*, e *abcde* tambem se hão de ajustar; e da mesma sorte as arestas iguaes *DI*, e *di*; *DC*, e *dc*: mas as arestas *DI*, e *DC* determinão o parallelogrammo *DH*, e as arestas *di*, e *dc* o parallelogrammo *dh*, como faces lateraes, que são de prismas; logo estes parallelogrammos tambem se ajustarão. Do mesmo modo se demonstrará que todos os outros parallelogrammos do prisma *AH* se hão de ajustar com os do prisma *ah*; e por conseguinte o polygono *FGHIL* com o polygono *fghil*; visto que ficão os lados de hum confundidos com os do outro. Logo &c.

Dos corpos similhantes.

255. Dous polyedros são *similhantes*, quan-

quando, tendo o mesmo numero de faces, são os angulos polyedros de hum respectivamente iguaes aos angulos polyedros do outro; e similhantes as faces, que, em hum, e outro, ficão adjacentes aos angulos polyedros iguaes; e que se chamão *faces homologas*.

Dizem-se tambem *homologos* os angulos polyedros, a que ficão adjacentes as faces homologas.

Quanto aos cylindros, e ás pyramides conicas; são *similhantes* aquelles, ou aquellas, cujos eixos, e diametros das bases são proporcionaes, e igualmente inclinados entre si.

256. THEOR. *Se, em dous tetraedros, forem duas faces de hum similhantes a duas faces do outro, cada huma a cada huma, e similhantemente dispostas; e iguaes os angulos diedros formados por essas duas faces em cada hum dos tetraedros; os dous tetraedros serão similhantes.*

Sejão, *fig.* 120, os tetraedros *IKML*, e *ikml*; e sejão as faces *KIL*, e *LIM* do primeiro respectivamente similhantes ás faces *kil*, e *lim* do segundo, e similhan-

lhantemente dispostas; e seja o angulo diedro *KILM* = o angulo diedro *kilm*: digo que o tetraedro *IKML* he similhante ao tetraedro *ikml*.

Demonstr. Tome-se na aresta *IL* homologa a *il* a parte *Il* = *il*; e pelo ponto *l* conduzindo hum plano *ge* parallelo a base *KLM* (227); corte-se o tetraedro *Ikml*, que será similhante ao total *IKML* (255). Pois o angulo diedro *KILM* he = o angulo diedro *kilm* por hypothese; e he o triangulo *Ikl* igual ao triangulo *ikl*, por ser *Il* = *il* por construcção, o angulo *KIL* = o angulo *kil* pela similhança dos triangulos, e o angulo *Ikl* = o angulo *ikl*, por ser cada hum destes = *IKL*, pela mesma similhança (90); e do mesmo modo se demonstra ser o triangulo *Ilm* igual ao triangulo *ilm*; será o tetraedro *Ikml* igual ao tetraedro *ikml* (252): e por conseguinte o total *IKML* similhante a *Ikml*, tambem será similhante a *ikml*.

257. THEOR. *Se, em dous tetraedros, forem tres faces, que formão hum angulo triedro em hum, similhantes a tres faces, que formão hum angulo triedro no outro, cada huma a cada huma,*

e similhantemente dispostas; os dous tetraedros serão similhantes.

Sejão, *fig.* 120, os tetraedros *IKML*, e *ikml*; e sejão as tres faces do primeiro *KIL*, *LIM*, e *MIK*, que formão o angulo triedro em *I*, respectivamente similhantes ás tres faces do segundo *kil*, *lim*, e *mik*, que formão o angulo triedro em *i*, e similhantemente dispostas: digo que o tetraedro *IKML* he similhante ao tetraedro *ikml*.

Demonstr. Operando, e discorrendo, como na demonstração do Theorema antecedente, se mostrará a similhança dos tetraedros *IKML*, e *Ikml*; e a igualdade dos triangulos *Ikl*, e *ikl*; *Ilm*, e *ilm*; *Ikm*, e *ikm*: e disso se concluirá a igualdade dos tetraedros *Ikml*, e *ikml* (253); e por consequencia a similhança dos dous *IKML*, e *ikml*.

258. THEOR. *Se, em duas pyramides, forem todas as faces de huma similhantes a todas as faces da outra, cada huma a cada huma, e similhantemente dispostas; as duas pyramides serão similhantes.*

Se-

Sejão, *fig.* 135, as pyramides *FABCDE*, e *fabcde*; e sejão as faces da primeira *AFB*, *BFC*, *CFD*, *DFE*, *EFA*, e *ABCDE* respectivamente similhantes ás faces da segunda *afb*, *bfc*, *cfd*, *dfe*, *efa*, e *abcde*, e similhantemente dispostas: digo que a pyramide *FABCDE* he similhante á pyramide *fabcde*.

Demonstr. Pois as faces das pyramides são por hypothese respectivamente similhantes, e similhantemete dispostas; serão os angulos planos *FAB*, *FAE*, e *BAE*, que formão o angulo triedro em *A*, respectivamente iguaes aos angulos planos similhantemente dispostos *fab*, *fae*, e *bae*, que formão o angulo triedro em *a*; e por tanto iguaes os angulos triedros em *A*, e *a* (235). Do mesmo modo se mostrará a igualdade dos mais angulos triedros em *B*, e *b*; *C*, e *c*; *D*, e *d*, &c.; e por conseguinte a dos angulos polyedros em *F*, e *f*; visto que são formados por angulos planos respectivamente iguaes, similhantemente dispostos, e todas as faces estão de parte a parte igualmente inclinadas entre si (234). Logo nas duas pyramides *FABCDE*, e *fabcde*, concorrem todas as circunstancias, que fazem a sua similhança (255). Logo são similhantes. 259.

259. THEOR. *Se dous polyedros forem similhantes; elles se dividirão em igual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.*

Sejão, *fig.* 136, os polyedros similhantes *AGCDHEF*, e *agcdhef*, cujas faces similhantes, e similhantemente dispostas, *AG*, e *ag*; *GC*, e *gc*; *CDH*, e *cdh*; *HE*, e *he*; *EF*, e *ef*; *ABCDE*, e *abcde*; e por conseguinte respectivamente iguaes os angulos polyedros, a que ficão adjacentes essas faces similhantes: digo que os dous polyedros se dividirão em igual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.

Demonstr. Dividão-se quaesquer duas faces respectivamente similhantes, por ex., *ABCDE*, e *abcde*, em igual numero de triangulos similhantes, cada hum a cada hum; a saber, nos triangulos *ABE*, e *abe*; *BEC*; e *bec*; *CED*, e *ced*. Tirem-se em cada hum dos polyedros dos vertices de dous angulos polyedros homologos, por ex., *F*, e *f*, as rectas *FB*, e *fb*; *FE*, e *fe*, para os extremos correspondentes das linhas homologas *BE*, e *be*:

be: os planos *FBE*, e *fbe* separaráõ dous tetraedros *FABE*, e *fabe* similhantes entre si, por serem as faces *FAB*, *FAE*, e *BAE*, que formão o angulo triedro em *A*, respectivamente similhantes ás faces *fab*, *fae*, e *bae*, que formão o angulo triedro em *a*, e similhantemente dispostas (257). Isto posto, mostremos agora que, separados os dous tetraedros, são ainda similhantes entre si os polyedros residuos; e bastará para isso, que se prove que as secções *FBE*, e *fbe*, são nos ditos residuos faces similhantes entre si, e similhantemente dispostas, e iguaes os angulos polyedros residuos, a que essas faces ficão adjacentes; por quanto todas as mais faces, e angulos polyedros dos polyedros residuos, são em tudo, como pertencentes tambem aos polyedros totaes. Com effeito, por serem similhantes os tetraedros separados, serão similhantes as secções *FBE*, e *fbe*, e similhantemente dispostas; e serão iguaes os angulos triedros homologos em *F*, e *f*; em *E*, e *e*; e em *B*, e *b*. Ora tambem pela similhança dos polyedros totaes são iguaes os angulos polyedros homologos em *F*, e *f*; em *E*, e *e*; e em *B*, e *b*; logo tirados destes angulos aquelles dos tetraedros, se-

rão

rão iguaes os residuos em F, e f; em E, e e; e em B, e b. Logo os polyedros residuos são similhantes. E pois do mesmo modo se podem nestes separar outros dous tetraedros similhantes; e assim nos seguintes; logo &c.

260. *Schol.* « Convem observar nos » polyedros similhantes:

» 1.° Que os vertices dos angulos po- » lyedros homologos são pontos simi- » lhantemente dispostos nos ditos polye- » dros. Porque, por ex., da similhan- » ça dos triangulos FAB, e fab se se- » gue que os pontos F, A, B, f, a, b, » estão similhantemente dispostos nos pla- » nos, em que estão situados; e como » estes mesmos planos estão similhante- » mente dispostos nos ditos polyedros si- » milhantes, e igualmente inclinados huns » a respeito dos outros; tambem os di- » tos pontos F, A, B, f, a, b, esta- » rão similhantemente dispostos nos mes- » mos polyedros.

» 2.° Que as arestas homologas, as » diagonaes homologas das faces simi- » lhantes, e as interiores dos ditos po- » lyedros, isto he, as que são tiradas » de vertices de angulos polyedros ho- » mologos a vertices de angulos polye-

» dros homologos, como tambem as per-
» pendiculares abaixadas de pontos ho-
» mologos sobre faces homologas, são
» linhas proporcionaes entre si. Com
» effeito, por serem respectivamente simi-
» lhantes as faces similhantemente dis-
» postas nos polyedros similhantes, e es-
» tas se dividirem em triangulos tambem
» respectivamente similhantes, será *AF* :
» *af* : : *FB* : *fb* : : *BE* : *be* : : *BC* :
» *bc* : : *CH* : *ch* : : *HL* : *hl* : : &c. »

Dos polyedros inscriptos, e circunscriptos aos cylindros, pyramides conicas, e á sphéra.

261. Inscrevendo, ou circunscrevendo a cada huma das bases de hum cylindro hum polygono regular do mesmo numero de lados, os quaes sejão respectivamente parallelos; tirando rectas dos vertices dos angulos do polygono superior para os vertices dos angulos correspondentes do polygono inferior; ficará inscripto, ou circunscripto ao cylindro hum prisma; como he facil de ver.

262. Inscrevendo, ou circunscrevendo hum polygono regular á base de

de huma pyramide conica; tirando rectas do vertice della para os vertices de cada hum dos angulos desse polygono; ficará inscripto, ou circunscripto á pyramide conica huma pyramide; como he facil de ver.

Se a pyramide conica he recta; a inscripta, ou circunscripta he regular.

263. Inscrevendo, ou circunscrevendo ao circulo maximo de huma sphéra hum polygono regular de hum numero de lados multiplice de 4; fazendo o semi-polygono huma revolução inteira ao redor de hum seu diametro, considerado immovel; ficará inscripto, ou circunscripto á sphéra hum corpo, que será composto de duas pyramides conicas rectas, e de ditas truncadas. E se a cada huma destas do inscripto se inscreverem, e do cicunscripto se circunscreverem pyramides regulares, e ditas truncadas do mesmo numero de faces, cujos lados dos polygonos das bases sejão respectivamente parallelos; resultará hum polyedro inscripto, ou circunscripto á sphéra, composto de duas pyramides regulares, e de ditas truncadas; como he facil de conceber.

Convem observar que essas faces são triangulos, e trapezios, que tem por al-

tura (no polyedro circunscripto) cada hum o seu lado do polygono circunvoluto.

264. He axioma: que de todas as superficies, que terminão nas mesmas linhas, a plana he a minima: e menor toda aquella convexa a respeito de qualquer outra, que a abranger entre si, e a dita plana. Assim a superficie da sphéra he sempre maior que a do polyedro inscripto; e menor que a do circunscripto.

265. THEOR. *A somma das áreas de quaesquer duas faces lateraes de hum prisma triangular he maior que a da terceira.*

Seja, *fig.* 137, o prisma triangular *ABDF*: digo que a somma das áreas de quaesquer duas das suas faces lateraes, he maior que a da terceira; isto he, $AD + DE > AF$.

Demonstr. Por hum ponto qualquer *b* de huma aresta *AB*, e perpendicular a ella, conduza-se o plano *bdf*, que será tambem perpendicular ás arestas *CD*, e *EF*, por serem parallelas a *AB* (204); e por tanto a secção *bd* deste plano com o plano *AD*, será a altura do parallelogrammo *AD*, por ser perpendicular a *AB*:

AB: e do mesmo modo se mostrará ser df a altura do parallelogrammo DE; e bf, a do parallelogrammo AF. Pelo que teremos a somma das áreas $AD + DE = AB \times bd + DC \times df$ (168), ou $AB\ (bd + df)$, por ser $AB = DC$; e será a de $AF = AB \times bf$: mas he $bd + df > bf$; logo $AB\ (bd + df) > AB \times bf$. Logo &c.

266. *Coroll.* Segue-se pois: que á medida que se duplicão os lados das bases de hum prisma inscripto em hum cylindro, se augmentão as áreas dos novos prismas, que podem resultar, tambem inscriptos: entretanto que duplicando os lados das bases do prisma circunscripto, as áreas dos circunscriptos, que resultarião, vão diminuindo.

267. THEOR. *Se dous lados contiguos da base de huma pyramide regular forem cortados por huma recta, de modo que os pontos da divisão distem igualmente do vertice do angulo formado por esses lados; tirando rectas desses pontos para o vertice da pyramide, ficará construido hum tetraedro, em que a somma das áreas das duas faces exteriores será maior que a da interior.*

Se-

Seja, *fig.* 138, a pyramide regular *GABCDEF*. Cortem-se os lados *AB*, e *BC* da base com a recta *mn*, de modo que seja $Bm = Bn$; e tirem-se *Gm*, e *Gn*: digo que a somma das áreas das duas faces exteriores do tetraedro *GBmn* he maior que a da interior; isto he, $GBm + GBn > Gmn$.

Demonstr. Conduza-se por *mn* hum plano, que corte perpendicularmente a aresta *GB* em hum ponto *o*: a secção *mo* desse plano com o do triangulo *GmB*, e a secção *no* do mesmo plano com o do triangulo *GnB*, serão perpendiculares, ambas, a *GB* no ponto *o* (192): pelo que será *mo* a altura do triangulo *GmB*; e *no* a do triangulo *GnB*; os quaes tem a mesma base *GB*. Logo a somma das áreas desses dous triangulos será $\frac{1}{2} GB (mo + no)$ (169). Imagine-se tirada do ponto *G* huma perpendicular a *mn*, que se denote por *P*; será *P* a altura do triangulo *mGn*; e a sua área $= \frac{1}{2} P \times mn$: mas he $GB > P$ (196); e $mo + no > mn$; logo $\frac{1}{2} GB (mo + no) > \frac{1}{2} P \times mn$. Logo &c.

268. *Coroll.* Seguem-se desta proposição a respeito das pyramides regulares inscriptas, e circunscriptas a huma

py-

pyramide conica recta, e por conseguinte tambem a respeito dos polyedros, de que fizemos menção (263), inscriptos, e circunscriptos a huma sphéra, as mesmas considerações, que fizemos no Corollario precedente á cerca dos prismas inscriptos, e circunscriptos a hum cylindro.

269. THEOR. *A superficie convexa de hum cylindro he maior que a do prisma inscripto; e menor que a do circunscripto. O mesmo digo da pyramyde conica recta a respeito da pyramide regular inscripta, e circunscripta: como do segmento spherico a respeito do segmento polyedral correspondente inscripto, e circunscripto.*

Sejão, *fig.* 139, o cylindro, que se representa pelo circulo da base *ABC*; e seja o prisma inscripto, o que se representa pelo polygono da base *ABCD* &c.: denote *C* a superficie convexa do cylindro; e *P* a do prisma: digo que $C > P$.

Demonstr. Porque se não he $C > P$; será $C <$ ou $= P$. Seja $C < P$; e marque δ a differença; isto he, seja $C + \delta = P$. Dupliquem-se os lados da base do pris-

prisma, até que resulte hum outro polygono AaB &c., cujos lados formem com a circunferencia do circulo segmentos taes, que a somma das áreas destes, que represento por s, isto he, a differença entre a área do circulo, e a desse polygono, seja $< \frac{1}{2} \delta$ (185). Inscreva-se sobre o dito polygono outro prisma, e denote P' a sua superficie convexa: ajunte-se a do cylindro a esses segmentos em ambas as bases: será $C + 2s > P'$ (264): mas he $P' > P$ (266); e suppozemos $C + \delta = P$; logo tambem $C + 2s > C + \delta$; isto he, $s > \frac{1}{2} \delta$: o que he absurdo, por quanto fizemos $s < \frac{1}{2} \delta$. Logo C não $< P$: nem tão pouco $= P$; porque então, por ser $P' > P$, seria $P' > C$; o que acabamos de ver, não tem lugar.

A respeito do prisma circunscripto, se demonstrará com hum discurso em tudo similhante: e da mesma sorte se fará na pyramide conica: mas a respeito desta, e do segmento spherico, he mais facil de provar-se da maneira seguinte.

Tome-se huma outra pyramide conica igual, e com igual pyramide inscripta, ou circunscripta: ajustem-se perfeitamente pelas bases: então he evidente

te que toda a superficie exterior he maior que a interior (264): logo tambem a metade daquella he maior que a metade desta: mas essas metades são as superficies das pyramides propostas, conica, e a inscripta, ou circunscripta; logo &c. O mesmo se fará com o segmento spherico.

270. PROBL. *Dadas duas sphéras concentricas; circunscrever á menor hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da maior.*

Sejão, *fig.* 140, as sphéras concentricas, que se representão pelas circunferencias dos circulos maximos respectivos, notadas por C, e c, e descriptas no mesmo plano.

Solução. Circunscreva-se ao circulo c hum polygono regular de hum numero de lados multiplice de 4, que não encontrem a circunferencia C (151): gire o semi-polygono ao redor de hum seu diametro, considerado immovel; e ficará circunscripto á sphéra c hum corpo, composto de duas pyramides conicas rectas, e de ditas truncadas. A cada hum destas se circunscrevão pyramides regulares,

e

e ditas truncadas, sobre polygonos regulares circunscriptos aos circulos, bases daquellas, todos do mesmo numero de lados, respectivamente parallelos, e tantos, quantos forem necessarios, para que estes não encontrem as circunferencias dos circulos, que os planos das ditas bases, continuados, tração na superficie da sphéra *C* (247): digo que tenho circunscripto o polyedro pedido.

Do modo de comparar, e de avaliar as áreas dos corpos.

271. THEOR. *Se dous polyedros forem similhantes; serão as suas áreas, como os quadrados de quaesquer arestas, ou linhas homologas.*

Demonstr. Porque a área de cada hum compõe-se de igual numero de polygonos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos (255): e então a área de cada polygono do 1.º polyedro será para a área do polygono correspondente no 2.º, como o quadrado de hum lado daquelle para o quadrado do homologo deste: e pois todos os lados homo-

lo-

logos, isto he, as arestas, e linhas homologas dos dous polyedros, tendo a mesma razão (260), tambem devem ter a mesma razão os seus quadrados; será a área de cada polygono do 1.° polyedro para a área do seu correspondente no 2.°; como o quadrado de qualquer aresta, ou linha do 1.° polyedro para o quadrado da sua homologa no 2.°: e por consequencia a somma das áreas de todos os polygonos do 1.° polyedro, isto he, a sua área, para a somma das áreas de todos os polygonos do 2.° polyedro, isto he, a sua área; como o quadrado de qualquer aresta, ou linha do 1.° para o quadrado da sua homologa no 2.°

272. *Schol.* „ Vê-se por tanto; que „ nos polyedros similhantes basta com- „ parar os quadrados de quaesquer ares- „ tas, ou linhas homologas, para se sa- „ ber a relação, que se dá entre as suas „ áreas. Porém geralmente em quaesquer „ corpos he necessario primeiramente ava- „ liar a área de cada hum, e depois „ comparar esses valores, referidos a hu- „ ma mesma medida. Ora supposto que „ já fica dito na segunda Secção o mo- „ do de avaliar a área das figuras pla- „ nas; e que em geral he esse o meio

„ de

» de avaliar a área dos corpos polyedros; » calculando separadamente a de cada » huma das figuras planas, que os ter- » minão, e depois sommando todos es- » ses resultados; com tudo não he elle » o mais expedito em alguns casos; nem » applicavel aos corpos terminados por » superficies curvas: temos methodos mais » promptos, como vamos a ver nos Theo- » remas seguintes.

» Advertimos que nesta avaliação » não entrão as áreas das bases dos cor- » pos, que temos a considerar. »

273. THEOR. *Se o corpo for hum prisma; será avaliada a sua área pelo producto do perimetro da secção feita por hum plano perpendicular a huma aresta multiplicado por essa aresta.*

Seja, *fig.* 127, o prisma AF; e por hum ponto qualquer a de huma aresta AB, e perpendicular a ella, conduza-se o plano ace: denote L a dita aresta; P, o perimetro $ac + ce + eg + ag$ dessa secção; e A, a área do prisma: digo que $A = P \times L$.

Demonstra-se, discorrendo, como no *n.°* 265.

274.

274. *Coroll.* 1.° Avalia-se pois a área de hum prisma recto pelo producto do perimetro da base multiplicado pela altura.

275. *Coroll.* 2.° Denotem L, e l as arestas respectivas de dous prismas; P, e p, os perimetros das secções perpendiculares a essas arestas; A, e a, as respectivas áreas: será $A : a :: P \times L : p \times l$.

276. THEOR. *Se o corpo for huma pyramide regular; será avaliada a sua área por metade do producto do perimetro da base multiplicado pelo apothema da pyramide.*

Seja, *fig.* 123, a pyramide regular $ABCDE$; e denote A, a área; a, o apothema AP; n, o numero dos lados da base; L, hum qualquer BE; e por conseguinte $n \times L$, ou P, o seu perimetro: digo que $A = \frac{1}{2} P \times a$.

Demonstr. Por quanto as faces da pyramide regular são todas triangulos isosceles iguaes (238), e tantos, quantos são os lados da base da mesma pyramide; será a somma dos valores das áreas de todos esses triangulos, isto he, o da área da

da pyramide proposta, igual ao valor da área de hum qualquer delles, multiplicado pelo numero n dos lados da dita base. Ora he a área de hum qualquer delles, como $BAE = \frac{1}{2} BE \times AP$; ou $\frac{1}{2} L \times a$; logo será o valor da área da pyramide regular $= \frac{1}{2} n \times L \times a$, ou $A = \frac{1}{2} P \times a$.

277. THEOR. *Se o corpo for o tronco de huma pyramide regular; será avaliada a sua área pelo producto da semi-somma dos perimetros das duas bases multiplicada pela altura de hum dos trapezios, faces do tronco: ou tambem pelo producto do perimetro da secção feita por hum plano parallelo ás ditas bases, tirado a igual distancia destas, multiplicado pela mesma altura.*

Denote A a área do tronco; a, a altura de hum dos trapezios; P, o perimetro da base inferior; p, o da superior; e P', o da secção feita a igual distancia das ditas bases: digo que $A = \frac{1}{2} (P + p) \times a$, ou $P' \times a$.

Demonstra-se, como acima; recorrendo aos *n.os* 173, e 174.

278. THEOR. *Se o corpo for hum cylin-*

lindro recto; será avaliada a sua área pelo producto da circunferencia da base multiplicada pelo lado do cylindro.

Seja, *fig.* 141, o cylindro recto AE, cujo lado AB denote L; a circunferencia da base, C; e a área, A: digo que $A = C \times L$.

Demonstr. Porque se não he $A = C \times L$; seja $C \times L$ o valor da área de hum outro cylindro recto da mesma altura; maior, ou menor, que o proposto. Seja $= A'$, área do cylindro recto maior da mesma altura, que tem por base o circulo, cuja circunferencia está notada por C', descripta no mesmo plano, concentrica a C. Imagine-se circunscripto ao cylindro proposto hum prisma recto, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C'; e denote P o perimetro da base desse prisma: será a sua área $= P \times L$ (274). Ora esta área he menor que a do cylindro C', por ser ainda menor que a do prisma correspondente, inscripto no dito cylindro C'; como he facil de mostrar; a qual he menor que a área do mesmo C' (269); logo será $P \times L < C \times L$; isto he, $P < C$: o que he absurdo (150). Seja pois $C \times L = a$,

área

área do cylindro recto menor da mesma altura, que tem por base o circulo, cuja circunferencia está notada por c, descripta no mesmo plano, concentrica a C. Imagine-se então circunscripto ao cylindro c hum prisma recto, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C; e denote p o perimetro da base desse prisma: será a sua área $= p \times L$. Ora esta área he maior que a do dito cylindro c; logo será $p \times L > C \times L$; isto he, $p > C$: o que he absurdo, por ser p ainda menor que o perimetro do polygono correspondente inscripto no circulo, cuja circunferencia he C; o qual perimetro he menor que C (150). E pois não he $C \times L = A' > A$; nem $= a < A$; será $A = C \times L$.

279. *Coroll.* Logo as áreas de dous cylindros rectos similhantes estão entre si, como os quadrados dos raios das suas bases; ou como os dos seus lados, ou eixos. Porque denotando respectivamente C, e c as circunferencias das bases; R, e r, os raios; L, e l, os lados, ou eixos; he $C : c :: R : r :: L : l$ (255); he $L : l :: R : r :: L : l$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $C \times l : c \times l :: R^2 : r^2 :: L^2 : l^2$.

280.

280. THEOR. *Se o corpo for huma pyramide conica recta; será avaliada a sua área por metade do producto da circunferencia da base multiplicada pelo lado da mesma pyramide.*

Seja, *fig.* 142, a pyramide conica recta $ABCD$; cujo lado AB denote L; a circunferencia da base, C; e a área, A: digo que $A = \frac{1}{2} C \times L$.

Demonstra-se, discorrendo, como no Theorema precedente, reflectindo que os apothemas das pyramides regulares são lados das pyramides conicas rectas, a que se circunscrevem: e deduz-se, como no Corollario acima, com a unica differença de escrever $\frac{1}{2} C : \frac{1}{2} c$, o seguinte Corollario.

281. *Coroll.* Logo as áreas de duas pyramides conicas rectas similhantes estão entre si, como os quadrados dos raios das suas bases; ou como os dos seus lados, ou eixos.

282. THEOR. *Se o corpo for o tronco de huma pyramide conica recta; será avaliada a sua área pelo producto da semi-somma das circunferencias das bases multiplicada pelo lado do tronco.*

Seja, *fig.* 143, a pyramide conica recta truncada *Db*, cujo lado *Bb* denote *L*; a área, *A*; a circunferencia da base inferior, *C*; e a da superior, *c*: digo que $A = \frac{C+c}{2} \times L$.

Demonstr. Imagine-se completa a pyramide conica *ABD*; e no ponto *B* se levante a recta *BE* perpendicular a *AB*; que seja igual em comprimento á circunferencia *C*: tire-se *AE*; e pelo ponto *b* a recta *be*, parallela a *BE*: teremos *be* igual á circunferencia *c*; por quanto sendo *BE* : *be* : : *AB* : *ab* : : *BD* : *bd*, e sendo *BD* : *bd* : : *C* : *c*, he *C* : *c* : : *BE* : *be*; e por tanto *be* = *c*, por ser *BE* = *C*. Isto posto, a área da pyramide *ABD* he igual á do triangulo *ABE*, por ser huma, e outra avaliada por $\frac{1}{2}$ *C* × *AB* (280, e 169): da mesma sorte a área da pyramide *Abd* he igual á do triangulo *Abe*, por ser huma, e outra avaliada por $\frac{1}{2}$ *c* × *Ab*: logo, se da área da pyramide *ABD* tirarmos a da pyramide *Abd*; e da área do triangulo *ABE* tirarmos a do triangulo *Abe*; ficará a do tronco *Db* igual á do trapezio *Be*: mas he a área do trapezio $Be = \frac{BE+be}{2} \times Bb$, ou $\frac{C+c}{2} \times L$

(173);

(173); logo tambem será a área do tronco $A = \frac{C+c}{2} \times L$.

283. *Schol.* « Em lugar de $\frac{C+c}{2}$ po-
» demos substituir a circunferencia C' da
» secção feita por hum plano parallelo
» ao da base, conduzido pelo ponto F
» meio do lado Bb; isto he, póde-se di-
» zer que a área do tronco de huma py-
» ramide conica recta se avalia tambem
» pelo producto da circunferencia da sec-
» ção, feita a igual distancia das suas
» bases, multiplicada pelo lado do mes-
» mo tronco. Com effeito, por ser C:
» $BD :: c : bd :: C' : FG$, será $C + c$:
» $BD + bd :: C' : FG$; e por conse-
» guinte $C' = \frac{C+c}{2}$, pois he $\frac{BD+bd}{2} =$
» FG (174). »

284. THEOR. *Se o corpo for hum polyedro circunscripto á sphéra, como deixamos dito no n.° 263; será avaliada a sua área pelo producto da somma dos perimetros das bases das pyramides regulares, de que se compõe o polyedro, multiplicada por hum dos lados do polygono circunvoluto.*

Seja, *fig.* 144, *ACDEFGB* o semi-polygono regular circunvoluto á sphéra, cujo diametro *AB*; isto he, gire o semi-polygono ao redor do dito diametro, considerado immovel; e circunscreva-se o polyedro (263): denotando *A* a área; e p, p', p'', &c., os perimetros das bases das pyramides regulares, e ditas truncadas *Apmp*, mp', $m'p''$, &c., de que elle se compõe: digo que $A = (p + p' + p'' + \text{&c.}) \times AC$.

Demonstr. Com effeito, a área da pyramide regular, de que he face o triangulo *Apm*, tem por expressão $\frac{1}{2} p \times AC$ (276): a área da truncada, de que he face o trapezio $pp'm'm$, tem por expressão $\frac{1}{2} (p + p') \times CD$ (277): a área da outra tambem truncada, de que he face o trapezio $p'p''m''m'$, tem por expressão $\frac{1}{2} (p' + p'') \times DE$: e assim as mais. Logo sommando todos esses valores, e reflectindo que he $AC = CD = DE = \text{&c.}$; teremos o valor da área do polyedro; isto he, $A = (p + p' + p'' + \text{&c.}) \times AC$.

285. *Schol.* « Será conveniente ao fim, » que nos propomos, que os polygonos » das bases dessas pyramides, e o cir- » cunvoluto, sejão todos do mesmo nu- » me-

» mero de lados; o que he sempre pos-
» sivel: e então em lugar da expressão
» da área $(p + p' + p'' +$ &c.$) \times AC$
» substituiremos o producto do perimetro
» do polygono circunvoluto, que denota-
» remos por P, multiplicado pelo seu dia-
» metro; isto he, póde-se dizer que a área
» desse polyedro se avalia tambem pelo
» producto do perimetro do polygono cir-
» cunvoluto, multiplicado pelo diametro
» do mesmo polygono. E na verdade:
» seja, *fig.* 145, $AEBLA$ o polygono
» mencionado, cujo diametro AB: ti-
» rando as rectas CM, MD, DK, KE,
» EL, LF, FI, IG, GH, e BC; e no-
» tando que os triangulos ACN, NMO,
» ODP, PKQ, &c. são similhantes en-
» tre si, e ao triangulo ABC, por se-
» rem rectangulos em N, P, R, &c.,
» e C, e serem iguaes os angulos ACN,
» NMO, ODP, PKQ, &c., e ABC
» (40, e 82); teremos $BC : AC ::$
» $CN : AN :: MN : NO :: DP : OP$
» $:: KP : PQ ::$ &c.; e por conseguin-
» te $BC : AC :: CN + MN + DP$
» $+ KP +$ &c.$: AN + NO + OP$
» $+ PQ +$ &c.; isto he, $BC : AC$
» $:: CM + DK +$ &c.$: AB$; ou $BC :$
» $CM + DK +$ &c. $:: AC : AB$:

» mas

» mas por serem BC, CM, DK, EL, » &c., diametros dos circulos inscriptos » nos respectivos polygonos P, p, p', p'', » &c., os quaes são similhantes por cons- » trucção, he $P : BC :: p : CM :: p' : DK :: p'' : EL ::$ &c.; ou $P : p + p' +$ &c. $:: BC : CM + DK +$ » &c.; logo tambem $P : p + p' +$ &c. » $:: AC : AB$; e por conseguinte $(p +$ » $p' +$ &c.) $\times AC = P \times AB$.

» Com este mesmo discurso se mos- » trará que a área de huma porção » $ACDKMA$ tem por expressão $P \times AP$. »

286. THEOR. *Se o corpo for huma sphéra; será avaliada a sua área pelo producto da circunferencia de hum dos seus circulos maximos multiplicada pelo diametro.*

Seja, *fig.* 146, a sphéra, que se representa pela circunferencia de hum dos seus circulos maximos notada por C: e denote D o diametro; e A, a área: digo que $A = C \times D$.

Demonstr. Porque se não he $A = C \times D$; seja $C \times D$ o valor da área de huma outra sphéra maior, ou menor, que a proposta. Seja $= A'$, área da sphéra

maior

maior concentrica, que se representa pela circunferencia de hum dos seus circulos maximos notada por C'. Imagine-se circunscripto a sphéra proposta hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphéra C', do modo que deixamos dito nos *n.os* 270, e 285; e denote P o perimetro do polygono circunvoluto, e D' o seu diametro: será a área do polyedro $= P \times D'$ (285). Ora esta área he menor que a da sphéra C', por ser ainda menor que a do polyedro correspondente inscripto na sphéra C', como se póde mostrar, a qual he menor que a da mesma C' (264); logo será $P \times D' < C \times D$: o que he absurdo, por ser $D' > D$; e $P > C$ (150). Seja pois $C \times D = a$, área da sphéra menor concentrica, que se representa pela circunferencia de hum dos seus circulos maximos notada por c. Imagine-se então circunscripto á sphéra c hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphéra C, do modo que deixamos dito nos *n.os* 270, e 285; e denote p o perimetro do polygono circunvoluto, e d, o seu diametro: será a área do polyedro $= p \times d$. Ora esta área he maior que a da sphéra c (264); logo será $p \times d > C \times D$: o que he absur-

surdo, por ser $d < D$; e $p < C$; pois he p ainda menor que o perimetro do polygono correspondente inscripto no circulo, cuja circunferencia he C, o qual perimetro he menor que C. E pois não he $C \times D = A' > A$; nem $= a < A$; será $A = C \times D$.

287. *Coroll.* 1.° He pois a área da sphéra quadrupla da do seu circulo maximo (176): e igual á do cylindro a ella circunscripto: *fig.* 147 (278).

288. *Coroll.* 2.° As áreas de duas sphéras estão entre si, como os quadrados dos seus raios. Conclue-se, discorrendo, como no *n.°* 279.

289. THEOR. *Se o corpo for hum segmento spherico; será avaliada a sua área pelo producto da circunferencia de hum dos circulos maximos da respectiva sphéra, multiplicada pela altura do segmento.*

Seja, *fig.* 161, o segmento sphérico EAF, cuja altura AR; pertencente á sphéra, raio CA: denote C a circunferencia de hum dos circulos maximos; e A a área do segmento: digo que $A = C \times AR$.

Demonstr. Porque se não he $A =$

C

$C \times AR$; seja $C \times AR$ o valor da área de hum outro segmento spherico, maior, ou menor, que o proposto. Seja $=$ área do segmento spherico maior LMN, que tem por altura MR, pertencente á sphéra concentrica, raio CM. Imagine-se circunscripto á sphéra, de que he segmento o proposto EAF, hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da outra sphéra (270, e 285), e de modo que hum dos lados do polygono circunvoluto termine em hum ponto o entre EL, e DL, o que he sempre possivel; e denote P o perimetro desse polygono: teremos o segmento polyedral de altura ar, cuja área he $= P \times ar$ (285). Ora esta área he menor que a do segmento spherico LMN, por ser ainda menor que a do segmento polyedral correspondente, inscripto no segmento spherico IMK, a qual he menor, que a do dito IMK; e com muita mais razão menor, que a do segmento spherico LMN; logo será $P \times ar < C \times AR$: o que he absurdo, por ser $P > C$, e $ar > AR$. Seja pois $=$ área de hum segmento spherico menor: e para não complicarmos a figura, tomemos agora pelo segmento proposto o segmento spherico LMN; e de-

note C' a circunferencia de hum dos circulos maximos da respectiva sphéra: e seja, se he possivel, $C' \times MR =$ área do segmento menor EAF, pertencente á sphéra concentrica, raio CA. Imagine-se circunscripto do mesmo modo a esta sphéra hum polyedro; e conservadas as mesmas denotações, teremos que a área do segmento polyedral, de altura ar, he $= P \times ar$. Ora esta área he maior, que a do segmento spherico EAF, por ser ainda maior que a do segmento de altura Ar, a qual he maior que a do dito EAF; logo será $P \times ar > C' \times MR$: o que he absurdo, por ser $P < C'$, e $ar < MR$; por quanto, concebendo as cordas IM, e oa, os triangulos similhantes IPM, e ora, dão $IM : oa :: MP : ar$; donde, por ser $IM > oa$, he $MP > ar$; e por conseguinte MR muito maior que ar. Logo &c.

Dos volumes dos corpos.

290. THEOR. *Se dous parallelipipedos tiverem a mesma base, e a mesma altura; ou bases iguaes, e alturas iguaes; terão volumes iguaes.*

Dous

Dous casos comprehende este Theorema.

1.° Sejão, *fig.* 148, os parallelipipedos *ABDF*, e *ABLN*, construidos sobre a mesma base *ABHG*, e terminados pelo mesmo plano *DE* parallelo ao da base: e sejão-lhes communs os planos lateraes oppostos *BN*, e *AM*: digo que os dous parallelipipedos são iguaes em volume.

Demonstr. Com effeito, por serem os parallelogrammos *CB*, e *CL*, e o triangulo *ACI*, que formão o angulo triedro em *C*, e os parallelogrammos *EH*, e *EN*, e o triangulo *GEM*, que formão o angulo triedro em *E*, respectivamente iguaes, e similhantemente dispostos; serão iguaes os prismas triangulares *CDBL*, e *EFHN* (254). Ora o volume do polyedro *ABDN* compõe-se do volume do prisma triangular *EFHN* mais do volume do parallelipipedo *ABDF*; ou do volume do prisma triangular *CDBL* mais do volume do parallelipipedo *ABLN*; logo, pois os dos prismas são iguaes, serão necessariamente iguaes os dos parallelipipedos.

2.° Sejão agora, *fig.* 149, os parallelipipedos *ABDF*, e *ABPR*, construidos sobre a mesma base *ABHG*, e terminados

dos pelo mesmo plano DQ parallelo ao da base; e não lhes sejão communs os planos lateraes oppostos: digo que estes dous parallelipipedos são iguaes em volume.

Demonstr. Prolongadas as rectas OP, e QR, cortarão a DF em L, e N; e a CE em I, e M; como he facil de ver: e tirando as rectas AI, BL, GM, e HN, se formará o parallelipipedo $ABLN$, por serem os planos oppostos parallelos, e iguaes. Ora este parallelipipedo, pela 1.ª parte já demonstrada, he igual em volume a cada hum dos dous propostos; logo tambem elles o serão entre si.

291. *Coroll.* 1.° Pelo que, se dividindo, *fig.* 150, a base $ABHG$ de qualquer parallelipipedo rectangulo AF, em quantos rectangulos iguaes quizermos; por ex., BN, LY, &c.; conduzirmos pelas rectas dessas divisões planos perpendiculares á dita base; como LM, ZX, &c.; ficará o parallelipipedo proposto tambem dividido em outros tantos parallelipipedos rectangulos iguaes entre si. E se concluirá, discorrendo, como em o *n.°* 162: que o parallelipipedo rectangulo AF está para a base $ABHG$, como hum numero qualquer daquellas partes do dito parallelipipedo es-

está para o mesmo numero d'estoutras partes da dita base.

292. *Coroll.* 2.° Dous parallelipipedos da mesma, ou igual altura, construidos sobre parallelogrammos da mesma base, e da mesma altura, como por ex., *fig.* 151, os parallelogrammos *BF*, e *BN*; ou sobre parallelogrammos de igual base, e de igual altura; são iguaes em volume. Por quanto sobre cada hum desses parallelogrammos se póde construir hum parallelipipedo recto de igual altura á daquelles; a saber: sobre a base *BF* o parallelipipedo recto *BE*; e sobre a base *BN*, o parallelipipedo recto *BM*; cada hum dos quaes he igual em volume ao seu respectivo: ora estes mesmos dous parallelipipedos rectos tambem o são entre si, como tendo a mesma base *BG*, e a mesma altura; logo &c.

293. THEOR. *Se pelas diagonaes de quaesquer faces oppostas de hum parallelipipedo se conduzir hum plano; esse plano dividirá o parallelipipedo em dous prismas triangulares iguaes em volume.*

Se-

Seja, *fig.* 152, o parallelipipedo recto *BE*, ou *fig.* 153, obliquo: pelas diagonaes *CG*, e *DH* de duas faces oppostas, em qualquer delles, se conduza hum plano: digo que este plano divide o parallelipipedo *BE* em dous prismas triangulares *CDHB*, e *CDHF*, iguaes em volume.

Demonstr. Que o divide em dous prismas triangulares, he sem duvida; por quanto as rectas *CD*, e *GH*, parallelas, e iguaes a *AB*, são iguaes, e parallelas entre si; e por tanto estando no mesmo plano com as diagonaes *CG*, e *DH*, formaráõ o parallelogrammo commum *CDHG*: e he manifesto que as outras duas faces em cada hum dos ditos prismas são parallelogrammos, e as bases, triangulos. Resta pois só mostrar que esses ditos dous prismas triangulares são iguaes em volume.

Se se considera o parallelipipedo recto *BE*, *fig.* 152; conclue-se que os dous prismas triangulares são iguaes, por quanto os parallelogrammos *AD*, e *AH*, e o triangulo *CAG*, que formão o angulo triedro em *A*, e os parallelogrammos *EH*, e *ED*, e o triangulo *CEG*, que formão o angulo triedro em *E*, são respectivamente iguaes,

e

e similhantemente dispostos (254). Considerando porém o parallelipipedo obliquo *BE*, *fig.* 153; então se demonstrará da maneira seguinte.

Pelos pontos *A*, e *B* de huma aresta *AB* do prisma triangular *CDHB*, e perpendicularmente a ella, conduzão-se dous planos *AIM*, e *BLN*; e continuando as arestas *CD*, e *GH*, até encontrarem este ultimo plano nos pontos *L*, e *N*, tirem-se as rectas *BL*, e *LN*; e teremos o prisma triangular recto *ILBN*, que, segundo acabamos de mostrar, será metade do parallelipipedo recto da mesma altura; e base, o parallelogrammo *AIOM*. Ora este parallelipipedo recto he igual em volume ao parallelipipedo obliquo *BE*, como tendo a mesma altura *MA*, e por bases os parallelogrammos *ABLI*, e *ABDC* da mesma base, e da mesma altura (292): logo o volume do prisma recto *ILBN* será tambem metade do volume do parallelipipedo obliquo *BE*: mas as pyramides quadrangulares *AMGCI*, e *BNHDL*, são iguaes, por serem as faces de huma respectivamente iguaes ás faces da outra, similhantemente dispostas, e igualmente inclinadas entre si; e he por isso o prisma triangular recto igual

em

em volume ao prisma triangular obliquo, como compostos cada hum da sua pyramide quadrangular igual, e do polyedro commum *IDBH*; logo tambem o volume do prisma triangular obliquo *CDHB*, será metade do volume do parallelipipedo obliquo *BE*. Logo &c.

294. *Coroll.* Desta, e da precedente proposição se conclue: que dous prismas triangulares da mesma base, e da mesma altura; ou de bases iguaes, e alturas iguaes; são iguaes em volume; como tambem, os que tendo igual altura, são construidos sobre triangulos de igual base, e de igual altura.

295. THEOR. *Se hum tetraedro for cortado por planos parallelos ao da base, e equidistantes entre si; e entre cada dous planos consecutivos se inscreverem, e circunscreverem prismas ao dito tetraedro; será a differença entre a somma dos volumes de todos os circunscriptos, e a somma dos volumes de todos os inscriptos, igual ao volume do circunscripto, cuja base he a mesma do tetraedro.*

Seja, *fig.* 154, o tetraedro *DABC*: du-

divida-se qualquer aresta DB em quaesquer partes iguaes; e pelos pontos da divisão cortem o tetraedro planos parallelos ao da base: tirem-se pelos pontos N, R, O, S, &c., em que esses planos cortão as outras duas arestas, outras tantas parallelas a DB; e prendendo os extremos destas com as rectas de, fg, &c., imaginem-se os prismas inscriptos NF, OG, &c. Do mesmo modo; produzindo os lados desses planos, e tirando as parallelas necessarias a DB, se concebão os prismas circunscriptos ME, LF, &c.: digo que a differença entre a somma dos volumes de todos os circunscriptos, e a somma dos volumes de todos os inscriptos, he igual ao volume do prisma circunscripto HB, cuja base he a mesma do tetraedro.

Demonstr. Com effeito, sendo $ME = NF$ (294); $LF = OG$; $IG = PB$; será $ME + LF + IG + HB - NF - OG - PB$, ou $(ME + LF + IG + HB) - (NF + OG + PB) = HB$.

296. *Schol.* « Convem observar que, » cortado successivamente o tetraedro por » planos parallelos ao da base, e equi- » distantes entre si, se lhe poderáõ ins- » crever, e circunscrever tantos prismas,

» que a differença entre a somma dos vo-
» lumes de todos os circunscriptos, e a
» somma dos volumes de todos os ins-
» criptos, isto he, HB, seja menor que
» qualquer volume assignado, por peque-
» no que este se dê: e com muita mais
» razão o será a differença entre a som-
» ma dos volumes dos circunscriptos, ou
» dos inscriptos, e o volume do mesmo
» tetraedro. »

297. THEOR. *Se dous tetraedros tiverem a mesma base, e a mesma altura; ou bases iguaes, e alturas iguaes; terão volumes iguaes.*

Sejão, *fig.* 155, os tetraedros $DABC$, e $D'ABC$, da mesma base, e igual altura: e denotem T, e T', os respectivos volumes: digo que $T = T'$.

Demonstr. Porque se não he $T = T'$; seja $T > T'$. Inscrevão-se em cada hum dos tetraedros, e em igual numero, tantos prismas, quantos forem necessarios, para que a differença entre o volume de qualquer dos tetraedros, e a somma dos volumes de todos os prismas nelle inscriptos seja menor, que qualquer assignado, por pequeno que este se tome. Se

de-

denotarmos por S a somma dos volumes dos prismas inscriptos em T, e por S' a dos inscriptos em T'; será $T - S < T - T'$; donde $S > T'$: mas he $S = S'$, por serem os volumes dos prismas, inscriptos em hum, respectivamente, e por ordem iguaes aos volumes dos inscriptos no outro, como tendo bases iguaes, e alturas iguaes (294); logo será tambem $S' > T'$; o que he manifesto absurdo: logo he $T = T'$.

298. THEOR. *Se hum prisma triangular, e hum tetraedro tiverem a mesma base, e a mesma altura; ou bases iguaes, e alturas iguaes; será o volume do tetraedro a terça parte do volume do prisma.*

Seja, *fig.* 156, o prisma triangular *BCDEGF*, e o tetraedro *ABCD*, da mesma base, e igual altura: digo que o volume do tetraedro he a terça parte do volume do prisma.

Demonstr. Tirem-se as rectas *BF*, *FC*, e *CE*; e considere-se o prisma dividido em tres tetraedros; a saber: *FBCD*, *FEBC*, e *FECG*. Pois os triangulos *EBC*, e *ECG* são iguaes; serão iguaes em vo-

lume os dous *FEBC*, e *FECG*, como tendo a mesma altura, e por bases esses triangulos (297): pela mesma razão serão iguaes em volume os dous *FBCD*, e *CEFG* (ou *FECG*). Logo os tres tetraedros, em que foi dividido o prisma, são entre si iguaes em volume; e por tanto cada hum desses igual á terça parte do volume do prisma: mas o proposto *ABCD* he tambem igual em volume ao tetraedro *FBCD*; logo tambem o seu volume he a terça parte do volume do prisma.

299. THEOR. *Se dous parallelipipedos rectangulos tiverem*: 1.° *a mesma altura, ou alturas iguaes*; *serão os seus volumes, como as áreas das suas bases*: 2.° *se a mesma base, ou bases iguaes*; *serão os seus volumes, como as suas alturas*: 3.° *se bases desiguaes, e alturas desiguaes*; *serão os seus volumes, como os productos das áreas das suas bases multiplicadas pelas suas alturas.*

1.° Sejão, *fig.* 157, os parallelipipedos rectangulos *AF*, e *AH*, da mesma altura *AE*: digo que *AF* : *AH* : : *AG* : *AD*.

Demonstr. Porque se não está *AF* : *AH*

$AH :: AG : AD$; estará como AG para huma base $X >$ ou $< AD$. Esteja $:: AG : X > AD$; isto he, $:: AG : AR$. Divida-se AG em tantos rectangulos iguaes, quantos forem necessarios, para que huma das divisões, continuada, caia entre D, e R, por ex., em I; e complete-se sobre a base AI o parallelipipedo rectangulo AQ: será $AF : AQ :: AG : AI$ (291): mas tambem suppozemos $AF : AH :: AG : AR$; logo $AQ : AH :: AI : AR$: mas $AQ > AH$; logo tambem $AI > AR$: o que evidentemente he absurdo. Com igual raciocinio, e imitando, o que temos feito em outros lugares, se demonstrará tambem não ser $AF : AH :: AG : X < AD$. E pois não está $AF : AH :: AG : X >$ ou $< AD$; estará $AF : AH :: AG : AD$.

2.° Sejão agora os parallelipipedos rectangulos AH, e AC da mesma base AD: digo que $AH : AC :: AE : AB$.

He demonstrado, porque podemos considera-los, como tendo a mesma altura AL; e então as bases são AM, e AN; que estão entre si, como $AE : AB$ (165).

3.° Sejão porém os parallelipipedos re-

rectangulos AF, e AC de bases desiguaes, e alturas desiguaes: digo que $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$.

Demonstr. Pela 1.ª parte do Theorema temos $AF : AH :: AG : AD$; e pela 2.ª $AH : AC :: AE : AB$. Logo multiplicando ordenadamente estas duas proporções, virá $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$. (*)

300. *Coroll.* 1.° Se $AF = AC$; será $AG \times AE = AD \times AB$; donde $AG : AD :: AB : AE$: que quer dizer: que sendo iguaes em volume dous paralellipipedos rectangulos de bases desiguaes, ou de alturas desiguaes; as suas bases serão reciprocamente proporcionaes ás suas alturas.

301. *Coroll.* 2.° Quanto pois dissemos a respeito dos parallelipipedos rectangulos; se estende em geral a quaesquer parallelipipedos; e por consequencia tambem a quaesquer prismas triangulares, e tetraedros. Porque todo o parallelipipedo he igual em volume ao parallelipipedo recto da mesma altura, construido porém este sobre hum rectangulo da mesma base, e da mesma altu-

(*) Veja-se o que dissemos na nota ao n.° 165.

tura do parallelogrammo, base daquelle (292). E quanto aos prismas triangulares, e aos tetraedros; como os volumes daquelles são a metade de volumes de parallelipipedos da mesma altura &c. (293); e os destes, a terça parte de volumes de prismas triangulares da mesma base, e da mesma altura (298); necessariamente hão de ter a mesma razão, que os desses parallelipipedos, e prismas.

Da avaliação dos volumes, e da sua medida.

302. Por quanto *medir* o volume de hum corpo não he outra cousa mais, que compara-lo com hum outro conhecido, o qual se considera então, como unidade; procurando saber, quantas vezes se contém naquelle, que se trata de medir: e por outro lado sabemos que os volumes dos parallelipipedos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas; segue-se: que, se denotar A a altura, e B a base de hum parallelipipedo P, cujo volume se pretende avaliar; e a a altura, e b a base

de

de hum parallelipipedo p, tomado para medida, ou unidade de volume; teremos conhecido o daquelle, visto que podemos saber, quantas vezes contém o deste. E com effeito por ser $P : p :: B \times A : b \times a$; será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$; o que faz ver: que, para avaliarmos o volume de hum parallelipipedo qualquer P, deveremos, depois de examinarmos, quantas vezes na sua base B se contém a base b da unidade de volume, e quantas na altura A se contém a altura a, multiplicar esses dous quocientes; e o producto nos mostrará o numero de vezes, que o volume, escolhido para unidade, se contém naquelle do parallelipipedo P, que se trata de avaliar.

Como porém a medida geral dos volumes, e a mais natural, he hum cubo conhecido, por ex., huma pollegada cubica, hum pé cubico, &c.; no caso de que por p escolhamos huma qualquer dessas medidas, por ex., hum pé cubico (1^{ppp}); então $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$ se torna em $\frac{P}{1^{ppp}} = \frac{B}{1^{pp}} \times \frac{A}{1^{p}}$, ou $P = B \times A$; ex-

pres-

pressão abreviada, e donde vem dizer-se geralmente que

O volume de hum parallelipipedo se avalia multiplicando a base pela altura; e por tanto o de hum cubo pela terceira potencia da sua aresta. (*)

Não se perca porém de vista, todas as vezes que assim nos expressarmos, que sempre se deve entender por esse producto o numero de medidas cubicas, que se contém no volume procurado.

303. *Coroll.* 1.° Será pois avaliado o volume de hum prisma triangular pelo producto da base multiplicada pela altura. E o de hum tetraedro, pela terça parte desse producto (298).

304. *Coroll.* 2.° E daqui se segue: que em dous tetraedros similhantes são os volumes, como os cubos das suas arestas, ou linhas homologas. Porque elles podem sempre ter por base quaesquer faces homologas B, e b; e por consequencia as suas alturas A, e a, serão tambem linhas homologas, e proporcionaes a quaesquer outras homologas L, e l (260); e por isso sendo

B:

(*) Por isso se diz cubo de hum numero, ainda que impropriamente, a terceira potencia desse numero.

$B : b :: A^2 : a^2 :: L^2 : l^2$ (171); e $\frac{1}{3} A : \frac{1}{3} a :: A : a :: L : l$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{3} B \times A : \frac{1}{3} b \times a :: A^2 : a^2 :: L^2 : l^2$.

305. *Coroll.* 3.° Logo em geral os volumes de dous polyedros similhantes estão entre si, como os cubos de quaesquer arestas, ou linhas homologas. Porque os polyedros similhantes sempre se podem considerar, como compostos de igual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; e então o volume de cada tetraedro do 1.° polyedro será para o do tetraedro correspondente no 2.°; como o cubo de huma aresta, ou linha daquelle para o cubo da homologa deste: e pois todas as arestas, e linhas homologas tendo a mesma razão, tambem devem ter a mesma razão os seus cubos; será o volume de cada tetraedro do 1.° polyedro para o volume do seu correspondente no 2.°; como o cubo de qualquer aresta, ou linha do 1.° polyedro para o cubo da sua homologa no 2.°: e por consequencia a somma dos volumes de todos os tetraedros, de que se compõe o 1.° polyedro, isto

to he, o seu volume, para a somma dos volumes de todos os tetraedros, de que se compõe o 2.° polyedro, isto he, o seu volume, como o cubo de huma aresta, ou linha do 1.° para o cubo da sua homologa no 2.°

306. *Schol.* « Vê-se por tanto, que » nos polyedros similhantes basta com- » parar os cubos de quaesquer linhas ho- » mologas, para se saber a relação, que » se dá entre os seus volumes. Porém em » geral em quaesquer corpos he necessa- » rio primeiramente avaliar o volume de » cada hum, e depois comparar esses va- » lores, referidos a huma mesma medi- » da: e para isto nos serve a avaliação » dos volumes dos tetraedros, pois por » meio delles se póde sempre avaliar o » volume de hum polyedro qualquer; o » que se faz dividindo o polyedro em » tetraedros, calculando separadamente » o volume de cada hum, e depois som- » mando todos esses resultados. Com tu- » do, ainda que em geral este he o meio » de avaliar os volumes dos polyedros, » não he elle o mais expedito em al- » guns casos, nem applicavel aos cor- » pos terminados por superficies cur- » vas: temos methodos mais promptos,

» co-

» como vamos a ver nos Theoremas se-
» guintes. »

307. THEOR. *Se o corpo for hum prisma; será avaliado o seu volume pelo producto da base multiplicada pela altura.*

Seja, *fig.* 158, o prisma *BE*, cuja base he qualquer polygono *BDHFL*: e denote *B* essa base; *A*, a altura; e *V*, o volume: digo que $V = B \times A$.

Demonstr. Dividão-se os dous polygonos *ACGEI*, e *BDHFL*, pois são iguaes, em igual numero de triangulos respectivamente iguaes, pelas diagonaes *CI*, *IG*, &c., e *DL*, *LH*, &c.; e imaginem-se os planos *CL*, *LG*, &c., tirados pelas diagonaes correspondentes *CI*, e *DL*; *IG*, e *LH*, &c., que serão outros tantos parallelogrammos, como já fizemos ver em igual caso no *n.°* 293: facilmente se conceberá o prisma proposto dividido em tantos prismas triangulares, quantos são os triangulos, em que foi dividida a base; a saber: nos prismas, cujas bases respectivas são os triangulos denotados por *b*, *b'*, *b''*, &c.; e a altura he a mesma *A* do prisma total. Ora o

vo-

volume do que tem por base b, se avalia por $b \times A$ (303); o do que tem por base b', por $b' \times A$; o do que tem por base b'', por $b'' \times A$; &c.: logo o volume do prisma BE, que se compõe de todos esses volumes, terá por valor a somma de todos esses valores; isto he, será $V = (b + b' + b'' + \text{&c.})\, A$, ou $B \times A$.

308. THEOR. *Se o corpo for huma pyramide; será avaliado o seu volume pela terça parte do producto da base multiplicada pela altura.*

Seja, *fig.* 159, a pyramide $IBDHFL$; cuja base he qualquer polygono $BDHFL$: e denote B essa base; A, a altura; e V, o volume: digo que $V = \frac{1}{3} B \times A$.

Demonstr. Com effeito, huma pyramide sempre se póde imaginar, como composta de tantos tetraedros da mesma altura della, quantos são os triangulos, em que póde ser dividido o polygono da base: e como o volume de cada hum destes tetraedros se avalia pela terça parte do producto da área de cada hum desses triangulos, como bases respectivas, multiplicada pela altura (303); e a somma de todos esses volumes faz o volume

da

da pyramide, assim como a somma de todos esses triangulos, o polygono da base; concluir-se-ha do mesmo modo que concluimos a respeito do prisma, ser o volume total da pyramide, isto he, $U = \frac{1}{3} B \times A$.

309. *Schol.* „ Serve tambem este Theorema para se avaliar o volume do tronco *kLmK*, *fig.* 120, de huma pyramide qualquer. Porque sendo o volume do dito tronco a differença entre o volume da pyramide inteira *IKLM*, e o da separada *Iklm*, terá por valor a terça parte do producto da base *KLM* multiplicada pela altura *IP* menos a terça parte do producto da base *klm* multiplicada pela altura *Ip*; sendo calculado primeiramente o valor de qualquer das ditas alturas, pela seguinte proporção, que a similhança das pyramides nos offerece; a saber: *KL* : *kl* :: *IP* : *Ip*; donde *KL* — *kl* : *KL* :: *IP* — *Ip*, ou *Pp* : *IP*. E com effeito fica *IP* determinado; por quanto, dado o tronco, se podem medir as linhas *KL*, *kl*, e *Pp*. „

310. THEOR. *Se o corpo for hum prisma triangular truncado, isto he, a porção*

ção de hum prisma triangular, cortado por hum plano não parallelo ao da base; será avaliado o seu volume pela terça parte do producto da dita base, multiplicada pela somma das perpendiculares, que de cada hum dos vertices dos angulos daquella secção se abaixarem sobre a mesma base.

Seja, *fig.* 160, o prisma triangular truncado *BDFACE*, cuja base he o triangulo *BDF*: e denote *B* essa base; *U*, o volume; e p, p', p'', as perpendiculares abaixadas de cada hum dos vertices *C*, *A*, *E* dos angulos da secção *ACE*, sobre a base *BDF*: digo que $U = \frac{1}{3} B (p + p' + p'')$.

Demonstr. Imagine-se cortado o dito prisma pelo plano *CBF* tirado pelo ponto *C*, e pela aresta *BF*; e separado o tetraedro *CBDF*; e que se divide tambem a pyramide quadrangular residua *CABFE* em outros dous tetraedros *CABF*, e *CAEF*, pelo plano *CAF* tirado pelo seu vertice *C*, e pela diagonal *AF* da base *ABFE*: teremos o prisma proposto dividido em tres tetraedros *CBDF*, *CABF*, e *CAEF*. Ora o volume do primeiro he sabido que se avalia por $\frac{1}{3} B \times p$ (303):

res-

resta pois só mostrar que o volume do segundo se avalia por $\frac{1}{3} B \times p'$; e o do terceiro por $\frac{1}{3} B \times p''$. Com effeito o tetraedro *CABF* he igual em volume a hum tetraedro *DABF*, como tendo a mesma base *ABF*, e igual altura, por estarem os vertices de ambos *C*, e *D* na mesma recta *CD* parallela a base (207): mas este mesmo tetraedro *DABF* póde ser considerado com a base *DBF*, e o vertice em *A*; logo o seu volume, ou o do tetraedro *CABF*, terá por valor $\frac{1}{3} B \times p'$. Da mesma sorte o tetraedro *CAEF* he igual em volume ao tetraedro *DBEF*, como tendo bases iguaes em área, a saber, os triangulos *AEF*, e *BEF*, construidos sobre a mesma base *EF*, e com iguaes alturas, por ser *AB* parallela a *EF*; e como tendo os tetraedros igual altura, por estarem os seus vertices *C*, e *D* na mesma recta *CD* parallela ao plano commum das bases: mas este mesmo tetraedro *DBEF* póde ser considerado com a base *BDF*, e o vertice em *E*; logo o seu volume, ou o do tetraedro *CAEF*, terá por valor $\frac{1}{3} B \times p''$. Consequentemente o volume do prisma total, pois se compõe desses tres volumes, terá por valor a somma dos tres respecti-

vos

vos valores, isto he, será $V = \frac{1}{3} B (p + p' + p'')$.

311. *Schol.* « Este Theorema he de » grande utilidade para a avaliação dos » volumes dos corpos polyedros; por » quanto se podem decompor em pris- » mas triangulares truncados, cujos vo- » lumes sabemos avaliar. »

312. THEOR. *Se o corpo for hum cylindro; será avaliado o seu volume pelo producto da base multiplicada pela altura.*

Seja, *fig.* 141, o cylindro AE; cuja altura denote A; a base, C; e o volume, V: digo que $V = C \times A$.

Demonstr. Porque se não he $V = C \times A$; seja $C \times A$ o valor do volume de hum outro cylindro da mesma altura; maior, ou menor que o proposto. Seja $= V'$, volume do cylindro maior da mesma altura, que tem por base o circulo, cuja circunferencia está notada por C', descripta no mesmo plano, concentrica a C. Imagine-se circunscripto ao cylindro proposto hum prisma, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C': e denote P a base desse prisma: será o

o seu volume $= P \times A$ (307). Ora este volume he evidentemente menor que o do cylindro C'; logo será $P \times A < C \times A$; isto he, $P < C$: o que he manifesto absurdo. Com igual raciocinio, e imitando, o que temos feito em outros lugares, se mostrará não ser $C \times A = v$, volume de hum cylindro da mesma altura, menor que o proposto. E pois não he $C \times A = V' > V$; nem $= v < V$; será $V = C \times A$.

313. *Coroll.* São pois os volumes de dous cylindros similhantes, como os cubos dos raios das suas bases; ou como os das suas alturas, ou eixos. Porque denotando respectivamente C, e c as bases; R, e r, os raios; A, e a, as alturas; E, e e, os eixos; he $C : c :: R^2 : r^2 :: A^2 : a^2 :: E^2 : e^2$ (178, e 255); he $A : a :: R : r :: A : a :: E : e$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, résulta $C \times A : c \times a :: R^3 : r^3$ :: &c.

314. THEOR. *Se o corpo for huma pyramide conica; será avaliado o seu volume pela terça parte do producto da base multiplicada pela altura.*

Se-

Seja, *fig.* 142, a pyramyde conica $ABCD$, cuja altura denote A; a base, C; e o volume, V: digo que $V = \frac{1}{3} C \times A$.

Demonstra-se, discorrendo, como no Theorema precedente: e deduz-se, como no Corollario acima, com a unica differença de escrever $\frac{1}{3} C : \frac{1}{3} c$, o seguinte Corollario.

315. *Coroll.* São pois os volumes de duas pyramides conicas similhantes, como os cubos dos raios das suas bases; ou como os das suas alturas, ou eixos.

316. *Schol.* « As epxressões $B \times A$, » e $C \times A$ (307, e 312); e $\frac{1}{3} B \times A$, e » $\frac{1}{3} C \times A$ (308, e 314); nos fazem » ver 1.° Que o volume de qualquer py- » ramide he a terça parte do volume de » hum prisma, ou cylindro, da mesma, » ou igual altura, e de bases iguaes » em área, quaesquer que sejão as fi- » guras destas. 2.° Que são iguaes em » volume dous prismas, ou dous cylin- » dros, ou hum prisma, e hum cylindro » (e o mesmo se dirá de duas pyrami- » des quaesquer, comparada huma com » outra) da mesma, ou igual altura, e » de bases iguaes em área, ainda que » differentes em figura. 3.° Que se fo-

» rem iguaes em volume, tendo bases
» desiguaes, ou alturas desiguaes; se-
» rão as bases reciprocamente propor-
» cionaes ás alturas. »

317. THEOR. *Se o corpo for huma sphéra; será avaliado o seu volume pela terça parte do producto da sua área multiplicada pelo raio.*

Seja, *fig.* 146, a sphéra, que se representa pela circunferencia de hum dos seus circulos maximos notada por C: e denote R o raio; A, a área; e V, o volume: digo que $V = \frac{1}{3} A \times R$.

Demonstr. Porque se não he $V = \frac{1}{3} A \times R$; seja $\frac{1}{3} A \times R$ o valor do volume de huma outra sphéra, maior, ou menor que a proposta. Seja $= V'$, volume da sphéra maior concentrica, que se representa pela circunferencia de hum dos seus circulos maximos notada por C'. Imagine-se circunscripto á sphéra proposta C hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphéra C' (270); e denote S a área desse polyedro. Reflectindo que o dito polyedro se póde tambem considerar, como hum aggregado de pyramides, cujas bases são as faces do mesmo

mo polyedro, cada huma de cada huma; e que tem todas o vertice no centro da sphéra, e por altura o raio da mesma; será o seu volume $= \frac{1}{3} S \times R$ (308). Ora este volume he evidentemente menor que o da sphéra C'; logo será $\frac{1}{3} S \times R < \frac{1}{3} A \times R$; isto he, $S < A$: o que he absurdo (264). Com igual raciocinio, e imitando, o que temos feito em outros lugares, se demonstrará não ser $\frac{1}{3} A \times R = v$, volume de huma sphéra menor, que a proposta. E pois não he $\frac{1}{3} A \times R = V' > V$; nem $= v < V$; será $V = \frac{1}{3} A \times R$.

318. *Coroll.* 1.° Por quanto a área de huma sphéra he quadrupla da de hum dos seus circulos maximos (287); segue-se: que o volume da mesma sphéra se avaliará tambem, multiplicando o quadruplo da área do dito circulo maximo pela terça parte do raio: ou em fim multiplicando a área do dito circulo maximo por $\frac{2}{3}$ do diametro: e he por isso o volume da sphéra $\frac{2}{3}$ do volume do cylindro a ella circunscripto.

319. *Coroll.* 2.° Os volumes de duas sphéras estão entre si, como os cubos dos seus raios. Porque denotando A,

e *a* as respectivas áreas; R, e r, os raios; he $A : a :: R^2 : r^2$ (288); he $\frac{1}{3} R : \frac{1}{3} r :: R : r$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{3} A \times R : \frac{1}{3} a \times r :: R^3 : r^3$.

320. THEOR. *Se o corpo for hum sector spherico; será avaliado o seu volume pela terça parte do producto da área do respectivo segmento spherico, multiplicada pelo raio.*

Seja, *fig.* 161, o sector spherico $CAEF$: e denote R o raio CA; A, a área do segmento spherico respectivo EAF; e V, o volume do sector; digo que $V = \frac{1}{3} A \times R$.

Demonstr. Porque se não he $V = \frac{1}{3} A \times R$; seja $\frac{1}{3} A \times R$ o valor do volume de hum outro sector spherico; maior, ou menor, que o proposto. Seja $=$ o volume do sector spherico maior $CMLN$, pertencente á sphéra concentrica, cujo raio CM. Imagine-se circunscripto á sphéra, de que he sector o proposto, hum polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da outra sphéra, de modo que hum dos lados do polygono circunvoluto termine em hum ponto *o* entre EL, e DL.

Ima-

Imaginem-se dos vertices dos angulos polyedros do segmento polyedral circunscripto, que tem por altura ar, rectas ao centro da sphéra: e teremos o sector polyedral *Caoi*, o qual se póde considerar, como hum aggregado de pyramides, que tem todas o vertice no centro da sphéra, e por altura, o raio da mesma: por conseguinte, denotando S a área desse segmento polyedral, será o volume do sector $Caoi = \frac{1}{3} S \times R$. Ora este volume he evidentemente menor que o do sector spherico $CMLN$; logo será $\frac{1}{3} S \times R < \frac{1}{3} A \times R$; isto he, $S < A$: o que he absurdo, por ser $S > A$, como já fizemos ver por occasião da demonstração do Theorema *n.°* 289. Do mesmo modo se demonstrará não ser $\frac{1}{3} A \times R =$ o volume de hum sector spherico menor. Logo &c.

321. *Schol.* « Esta proposição juntamente com a do *n.°* 314 nos servirá » para avaliarmos o volume de qualquer » segmento spherico; por quanto este he » a differença entre o volume de hum » sector spherico, e o de huma pyramide conica recta (251). »

FIM.

Pag.	*lin.*	*Erros*	*Emendas*
VII	23	*elle*	*elles*
VIII	6	que crear	que de crear
X	10	pode bem ser ter-se encontrado	pode bem ter-se encontrado
	15	Geometra, bem que	bemque Geometra
	23	*demonstration*	*égalité*
	26	*paroit eté*	*paroit avoir eté*
	27	*central*	*centrale*
6	22	em ambos	em ambos; tendo dous pontos F, E em ambos;
9	18	(7)	(8)
16	24	de gráos	dos gráos
17	22	90	90^{o}
30	18	destes	desses
39	3	a hum	em hum
57	16	sobrepondo	sobrepondo-se
71	26	*AC : AD*	*AC : : AD*
72	19	*Coroll.*	110 *Coroll.*
74	5	divirá	dividirá
78	21		
79	20	cada hum a cada hum	comparados cada hum a cada hum
80			
81	24		
82	9	marquem	marque
89	9	53	132
91	15	de hum angulo	do vertice de hum angulo
	16	para outro angulo	para o de outro angulo
	22	outro	outro, e que separe outro triangulo
	23	triangulo	triangulos
108	6	similhança,	similhança

Pag.	*lin.*	*Erros*	*Emendas*
112	18	hum outro	hum outro tambem regular
113	4		
120	23	$AG :: X$	$AG : X$
137	13	os lados	o numero dos lados
	14	forem	for
138	21	os lados	o numero dos lados
	22	forem	for
139	4	das figuras	das figuras rectilineas
147	19	que não	que serião perpendiculares aquell'outra no dito ponto, e não
155	10 e 13	a aresta	á aresta
157	25	dous angulos	dous angulos diedros
177	28	á base	sobre o plano da base
179	20	perpendicular a estas	perpendicular ao plano destas, e por ambos terminada,
195	4	inscripto, ou circunscripto	inscripta, ou circunscripta
197	11	se duplicão os lados	se duplica o numero dos lados
	16	os lados	o numero dos lados
199	18	Sejão	Seja
	27	Dupliquem-se os lados	Duplique-se o numero dos lados
200	24	e do segmento spherico	como do segmento spherico
208	29	$C \times l$	$C \times L$
236	8	qualquer polygono	o polygono
237	14		
238	5		
239	11	U	V
	15		

N. B. Outros erros ha, que não se notárão, por serem de evidente correcção.

CATALOGO

Das Obras já impressas, e mandadas compôr pela Academia Real das Sciencias de Lisboa; com os preços, por que cada huma dellas se vende brochada.

I. BREVES Instrucções aos Correspondentes da Academia sobre as remessas dos productos naturaes, para formar hum Museu Nacional, *folh.* 8.º 120

II. Memorias sobre o modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite em Portugal, remettidas á Academia por João Antonio Dalla-Bella, Socio da mesma, 1 vol. 4.º . . . 480

III. Memorias sobre a Cultura das Oliveiras em Portugal, remettidas á Academia pelo mesmo, 1 vol. 4.º 480

IV. Memorias de Agricultura premiadas pela Academia, 2 vol. 8.º 960

V. Paschalis Josephi Mellii Freirii Historiae Juris Civilis Lusitani Liber singularis, 1 vol. 4.º 640

VI. Ejusdem Institutiones Juris Civilis et Criminalis Lusitani, 5 vol. 4.º 2400

VII. Osmia, Tragedia coroada pela Academia, *folh.* 4.º 240

VIII. Vida do Infante D. Duarte, por André de Rezende *folh.* 4.º 160

IX. Vestigios da Lingoa Arabica em Portugal, ou Lexicon Etymologico das palavras, e nomes Portuguezes, que tem origem Arabica, composto por ordem da Academia, por Fr. João de Sousa, 1 vol. 4.º 480

X. Dominici Vandelli Viridarium Grysley Lusitanicum Linnaeanis nominibus illustratum, 1 vol. 8.° 200

XI. Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno de 1789, calculado para o Meridiano de Lisboa, e publicado por ordem da Academia, 1 vol. 4.° 360

O mesmo para os annos seguintes até 1809 inclusivamente.

XII. Memorias Economicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa, para o adiantamento da Agricultura, das Artes, e da Industria em Portugal, e suas Conquistas, 5 vol. 4.° 4000

XIII. Collecção de Livros ineditos de Historia Portugueza, dos Reinados dos Senhores Reis D. João I., D. Duarte, D. Affonso V. e D. João II. 3 vol. *fol.* 5400

XIV. Avisos interessantes sobre as mortes apparentes, mandados recopilar por ordem da Academia, *folh.* 8.° . . . . . *gr.*

XV. Tratado de Educação Fysica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco de Mello Franco, Correspondente da mesma, 1 vol. 4.° 360

XVI. Documentos Arabicos da Historia Portugueza, copiados dos Originaes da Torre do Tombo com permissão de S. Magestade, e vertidos em Portuguez, por ordem da Academia, pelo seu Correspondente Fr. João de Sousa, 1 vol. 4.° 480

XVII. Observações sobre as principaes causas da decadencia dos Portuguezes na Asia, escritas por Diogo de Couto em fórma de Dialogo, com o titulo de *Soldado Pratico*, publicadas por ordem da Academia Real das

Scien-

Sciencias, por Antonio Caetano do Amaral, Socio Effectivo da mesma, 1 tom. 8.º . . 480

XVIII. Flora Cochinchinensis; sistens Plantas in Regno Cochinchinae nascentes. Quibus accedunt aliae observatae in Sinensi Imperio, Africa Orientali, Indiaeque locis variis, labore ac studio Joannis de Loureiro, Regiae Scientiarum Academiae Ulyssiponensis Socii: Jussu Acad. R. Scient. in lucem edita, 2 vol. 4.º *mai.* 2400

XIX. Synopsis Chronologica de Subsidios, ainda os mais raros, para a Historia, e Estudo critico da Legislação Portugueza; mandada publicar pela Academia Real das Sciencias, e ordenada por José Anastasio de Figueiredo, Correspondente do Numero da mesma Academia, 2. vol. 4.º 1800

XX. Tratado de Educação Fysica para uso da Nação Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco José de Almeida, Correspondente da mesma, 1 vol. 4.º 360

XXI. Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha, publicadas de ordem da Academia, 1 vol. 8.º 600

XXII. Advertencias sobre os abusos, e legitimo uso das Agoas Mineraes das Caldas da Rainha, publicadas de ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco Tavares, Socio Livre da mesma Academia, *folh.* 4.º . . 120

XXIII. Memorias de Litteratura Portugueza, 8 vol. 4.º 6400

XXIV. Fontes Proximas do Codigo Filippino, por Joaquim José Ferreira Gordo, Correspondente da Academia, 1. vol. 4.º . . . 400

XXV. Diccionario da Lingoa Portugueza, 1 vol. *fol. mai.* 4800

XXVI.

XXVI. Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducção ao Methodo das Fluxões, por Francisco de Borja Garção Stockler, Socio da Academia, 8.º 240

XXVII. Ensaio Economico sobre o Commercio de Portugal, e suas Colonias, offerecido ao Serenissimo Principe da Beira o Senhor D. Pedro, e publicado de ordem da Academia Real das Sciencias, pelo seu Socio José Joaquim da Cunha de Azeredo Coutinho, segunda edição corrigida, e accrescentada pelo mesmo Auctor. 480

XXVIII. Tratado de Agrimensura, por Estevão Cabral, Socio da Academia, em 8.º . . 240

XXIX. Analyse Chymica da Agoa das Caldas, por Guilherme Withering, em Portuguez e Inglez, *folh.* 4.º 240

XXX. Principios de Tactica Naval, por Manoel do Espirito Santo Limpo, Correspondente do Numero da Academia, 1 vol. 8.º 480

XXXI. Memorias da Academia Real das Sciencias, 3 vol. *fol.* 6000

A Parte 1.ª do Tom. 4.º 1000

XXXII. Memorias para a Historia da Capitania de S. Vicente, 1 vol. 4.º 480

XXXIII. Observações Historicas e Criticas para servirem de Memorias ao systema da Diplomatica Portugueza, por João Pedro Ribeiro, Socio da Academia, Part. 1. 4.º . . 480

XXXIV. J. H. Lambert Supplementa Tabularum Logarithmicarum, et Trigonometricarum, 1. vol. 4.º 960

XXXV. Obras Poeticas de Francisco Dias Gomes, 1 vol. 4.º 800

XXXVI. Compilação de Reflexões de Sanches, Pringle &c. sobre as Causas e Prevenções das Doenças dos Exercitos, por Ale-

Alexandre Antonio das Neves: para distribuir-se ao Exercito Portuguez *folh.* 12.º . . gr.

XXXVII. Advertencias dos meios para preservar da Peste. *Segunda edição accrescentada com o* Opusculo de Thomaz Alvares sobre a Peste de 1569. *folh.* 12.º 120

XXXVIII. Hippolyto, Tragedia de Euripides, vertida do Grego em Portuguez, pelo Director de huma das Classes da Academia; *com otexto*, 1 vol. 4.º 480

XXXIX. Taboas Logarithmicas, calculadas até á setima casa decimal, publicadas de ordem da Real Academia das Sciencias por J. M. D. P. 1 vol. 8.º 480

XL. Indice Chronologico Remissivo da Legislação Portugueza posterior á publicação do Codigo Filippino, por João Pedro Ribeiro, Part. 1.ª, 2.ª, 3.ª, e 4.ª 3600

XLI. Obras de Francisco de Borja Garção Stockler, Secretario da Academia Real das Sciencias, 1 vol. 8.º 800

XLII. Collecção dos principaes Auctores da Historia Portugueza, publicada com notas pelo Director da Classe de Litteratura da Academia Real das Sciencias, 8 Tom. em 8.º 4800

XLIII. Dissertações Chronologicas, e Criticas, por João Pedro Ribeiro, 3 vol. 4.º . . . 2400

XLIV. Collecção de Noticias para a Historia e Geografia das Nações Ultramarinas, Tom. I.º Numeros 1.º 2.º 3.º e 4.º 600

O Tomo II. 800

XLV. Hippolyto, Tragedia de Seneca; e Phedra, Tragedia de Racine: traduzidas em verso, pelo Socio da Academia Sebastião Francisco de Mendo Trigoso, *com os textos.* . 600

XLVI. Opusculos sobre a Vaccina: Numeros I. até XIII. 300

XLVII. Elementos de Hygiene, por Francisco de Mello Franco, Socio da Academia, Parte 1.ª e 2.ª 600

XLVIII. Memoria sobre a necessidade e utilidades do Plantio de novos bosques em Portugal, por José Bonifacio de Andrada e Silva, Secretario da Academia Real das Sciencias, 1 vol. 4.º 400

XLIX. Taboadas Perpetuas Astronomicas para uso da Navegação Portugueza, 1 vol. 4.º 600

L. Elementos de Geometria, por Francisco Villela Barbosa, Cavalleiro da Ordem de Christo, Lente de Mathematica na Academia Real da Marinha, e Socio da Academia Real das Sciencias. 800

Estão no prelo as seguintes.

Documentos para a Historia da Legislação Portugueza, pelos Socios da Academia, João Pedro Ribeiro, Joaquim de Santo Agostinho de Brito Galvão, e outros.

Collecção dos principaes Historiadores Portuguezes.

Collecção de Noticias para a Historia e Geografia das Nações Ultramarinas.

Taboas Trigonometricas, por J. M. D. P.

Obras de Francisco de Borja Garção Stockler, Tom. 2.º

Collecção de Livros ineditos de Historia Portugueza, Tom. 4.º

Memorias da Academia, Part. 2.ª do Tom. 4.º

Obras do Padre Vieira.

Memoria sobre os Foraes.

Vendem-se em Lisboa *nas lojas dos* Mercadores de Livros na Rua das Portas de Santa Catharina; *e em* Coimbra, *e no* Porto *tambem pelos mesmos preços.*

PRIVILEGIO.

EU a RAINHA Faço saber aos que este Alvará virem: Que havendo-me representado a Academia das Sciencias estabelecida com Permissão Minha na Cidade de Lisboa, que comprehendendo entre os objectos, que fórmão o Plano da sua Instituição, o de trabalhar na composição de hum Diccionario da Lingoa Portugueza, o mais completo que se possa produzir; o de compillar em boa ordem, e com depurada escolha os Documentos, que podem illustrar a Historia Nacional, para os dar á luz; o de publicar em separadas Collecções as Obras de Litteratura, que ainda não forão publicadas; o de instaurar por meio

de novas Edições as Obras de Auctores de merecimento, e cujos Exemplares forem muito antigos, ou se tiverem feito raros; o de trabalhar exacta e assiduamente sobre a Historia Litteraria destes Reinos; o de publicar as Memorias dos seus Socios, das quaes as que contiverem novos descobrimentos, ou perfeições importantes ás Sciencias, e boas Artes serão publicadas com o titulo de *Memorias da Academia*, ficando as outras para servirem de materia a separadas e distinctas Collecções, nas quaes se dê ao Publico em Extractos e Traducções periodicamente tudo, o que nas Obras das outras Academias, e nas de Auctores particulares houver mais proprio, e digno da Instrucção Nacional; e finalmente o de fazer compôr, e publicar hum Mappa Civil e Litterario, que contenha as noticias do nascimento, empregos, e habitações das Pessoas principaes, de que se compoem os Estados destes Reinos, Tribunaes, ou Juntas de Administração da Justiça, Arrecadação de Fazenda, e outras particulares noticias, na conformidade do que se pratica em outras Cortes da Europa: E porque havendo de ser summamente despendiosas, tantas, e tão numerosas as Edições das sobreditas Obras, seria facil que a Academia se arriscasse a baldar a importante despeza, que determina fazer nellas; se Eu não me dignasse de privilegiar as suas Edições, para que se lhe não contrafizessem, nem se lhe reimprimissem contra sua vontade, ou mandassem vir de fóra impressas, em detrimento irreparavel da reputação da mesma Academia, e das consideraveis sommas que nellas deverá gastar: Ao que tudo Tendo consideração, e ao mais que Me foi presente em Consulta da Real Meza Censoria, á qual Commetti o exame desta louvavel empreza; Querendo animar a sobredita Academia, para que reduza a effeito os referidos uteis objectos, que o estão

tão sendo da sua applicação : Sou servida Ordenar aos ditos respeitos o seguinte :

Hei por bem, e Ordeno, que por tempo de dez annos, contados desde a publicação das Edições, sejão privilegiadas todas as Obras, que a sobredita Academia das Sciencias fizer imprimir e publicar; para que nenhuma Pessoa ou seja natural, ou existente, e moradora nestes Reinos as possa mandar reimprimir, nem introduzir nelles, sendo reimpressas em Paizes Estrangeiros : debaixo das penas de perdimento de todas as Edições que se fizerem, ou introduzirem em contravenção deste Privilegio, as quaes serão apprehendidas a favor da Academia ; e de duzentos mil reis de condemnação, que se imporá irremissivelmente ao transgressor, e que será applicada em partes iguaes para o Denunciante, e para o Hospital Real de S. José.

Exceptuo porém da generalidade deste Privilegio aquelles casos, em que as Materias, que fizerem o objecto das Obras que publicar a Academia, apparação tratadas com variação substancial, e importante ; ou pelo melhor methodo, novos descobrimentos, e perfeições scientificas se achar, que differem das que imprimio a Academia : sendo o exame e confrontação de humas e outras Obras feito na Real Meza Censoria, ao tempo de se conceder a Licença para a impressão das que fazem o objecto desta Excepção : Encarregando muito á mesma Meza o referido exame, e confrontação ; para consequentemente conceder, ou negar a Licença nos casos occorrentes e circunstancias acima referidas. Nesta Excepção Incluo as Obras particulares de cada hum dos Socios ; porque estas só poderáõ ser privilegiadas, ou quando forem impressas á custa da Academia, ou quando os seus

proprios Auctores Me supplicarem o Privilegio para ellas.

Hei outro sim por bem, e Ordeno, que sejão igualmente privilegiadas pelo referido tempo todas as Edições, que a referida Academia fizer de Manuscriptos, que haja adquirido: com tanto porém que dellas não resulte prejuizo ás Pessoas, que primeiro os houverem adquirido, ou lhes pertençáo pelos titulos de Herança, ou de Compra, e tenhão intenção de os imprimir por sua conta. E para que a este respeito haja alguma Regra, que attenda á utilidade publica, e á particular: Determino, que a Academia possa imprimir os referidos Manuscriptos; ou logo que mostrar que seus Donos não querem imprimillos; ou que havendo elles declarado quererem dallos á luz, o não fizerem no prefixo termo de cinco annos, que neste caso lhes serão assignados para os imprimirem.

Hei outro sim por bem, e Ordeno, que na generalidade do Privilegio, que a referida Academia Me supplica, e lhe Concedo na sobredira conformidade para a reimpressão das Obras ou antigas, ou raras, ou de Auctores existentes, fiquem salvas as Obras, que a Universidade de Coimbra mandar imprimir; ou porque sejão concernentes aos Estudos das Faculdades, que se ensinão nella; ou porque sendo compostas por Professores della, as mande imprimir a mesma Universidade, como hum testemunho publico dos progressos, e da reputação litteraria dos referidos Professores: E fiquem igualmente salvas as outras Obras, que actualmente estão sendo ou impressas, ou vendidas por algumas Corporações, e por Familias particulares, e que nellas tem em certo modo constituido ha muitos annos huma boa parte da sua subsistencia, e patrimonio; e a cujo beneficio Pode-

rei

rei privilegiallas, ou prorogar-lhes os Privilegios que tiverem.

Hei por bem finalmente, e Ordeno, que na concessão do Privilegio, que igualmente Concedo na sobredita conformidade, para a referida Academia publicar o Mappa Civil e Litterario na fórma acima declarada, fiquem salvos os Privilegios seguintes, a saber: o Privilegio concedido aos Officiaes da Minha Secretaria de Estado dos Negocios Estrangeiros, e da Guerra para a impressão da *Gazeta de Lisboa*: o Privilegio perpetuo da Congregação do Oratorio para a impressão do Diario Ecclesiastico, vulgarmente chamado *Folhinha*: e o Privilegio que Fui servida conceder a Felix Antonio Castrioto para o *Jornal Encyclopedico*: Para que em vista dos referidos Privilegios, e das Edições, que fazem os objectos delles, se haja a Academia de regular por tal maneira na composição do referido Mappa Civil e Litterario, que de nenhum modo fiquem offendidos os mesmos Privilegios, que devem ficar illesos.

E este Alvará se cumprirá sem duvida, ou embargo algum, e tão inteiramente, como nelle se contém.

E pelo que: Mando á Meza do Desembargo do Paço, Real Meza Censoria, Concelhos de Minha Real Fazenda, e Ultramar, Meza da Consciencia e Ordens, Regedor da Casa da Supplicação, Governador da Relação e Casa do Porto, Reformador Reitor da Universidade de Coimbra, Senado da Camara da Cidade de Lisboa, e a todos os Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Magistrados, e mais Justiças, ás quaes o conhecimento e cumprimento deste Alvará por qualquer modo pertença, ou haja de perten-

tencer; que o cumprão, guardem, fação cumprir, e guardar inviolavelmente, sem lhe ser posto embargo, impedimento, duvida, ou opposição alguma, qualquer que ella seja: para que a observancia delle seja inteira, e tão litteral, como nelle se contém. E Mando outro sim ao Doutor Antonio Freire de Andrade Enserrabodes, do Meu Conselho, Desembargador do Paço, e Chanceller Mór destes Reinos, que o faça publicar na Chancellaria, e que por ella passe: ordenando que nella fique registado, e que se registe em todos os lugares, em que deva ficar registado, e conveniente for á sobredita Academia, para a conservação e guarda dos Privilegios, que neste Alvará lhe Tenho concedido. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda aos vinte e dois de Março de mil setecentos oitenta e hum.

RAINHA

Visconde de Villanova da Cerveira.

Alvará pelo qual Vossa Magestade, pelos motivos nelle mencionados, Ha por bem conceder á Academia das Sciencias, estabelecida com a Sua Real Permissão na Cidade de Lisboa, o Privilegio por tempo de dez annos; para poder imprimir privativamente todas as Obras, de que faz menção: com excepções e modificações, que vão nelle expressas; e com as penas contra os transgressores do referido Privilegio. Tudo na fórma acima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

Registado nesta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino em o Liv. VI. das Cartas, Alvarás, e Patentes a fl. 93 v. Nossa Senhora da Ajuda 7 de Maio de 1781.

Joaquim José Borralho.

Antonio Freire d'Andrade Enserrabodes. Gratis.

Foi publicado este Alvará na Chancellaria Mor da Corte e Reino, pela qual passou. Lisboa de Maio de 1781.

D. Sebastião Maldonado.

Publique-se, e registe-se nos Livros da Chancellaria Mor do Reino. Lisboa 18 de Maio de 1781.

Antonio Freire d'Andrade Enserrabodes.

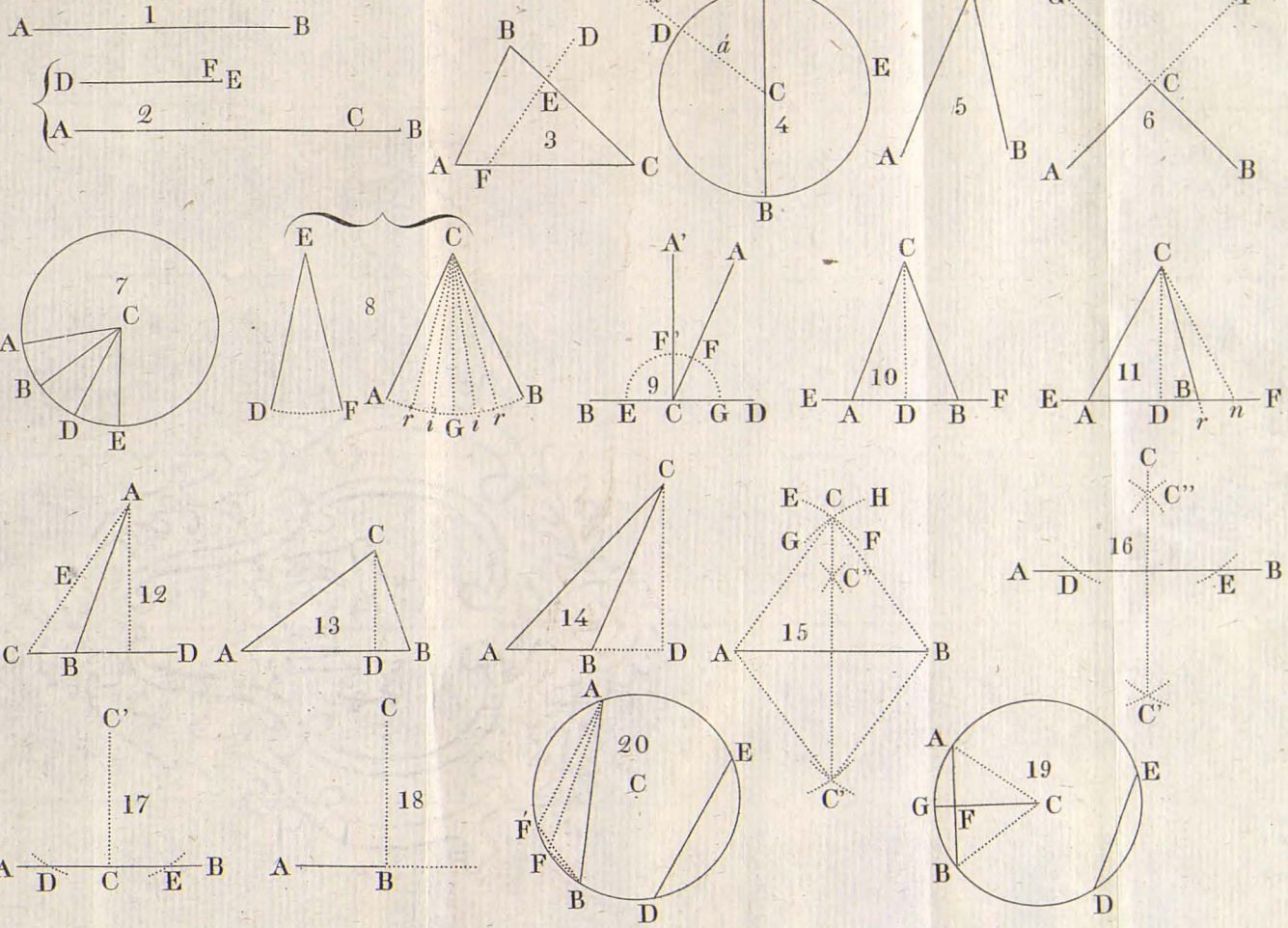
Registado na Chancellaria Mor da Corte e Reino no Livro das Leis a fl. 34 v. Lisboa 19 de Maio de 1781.

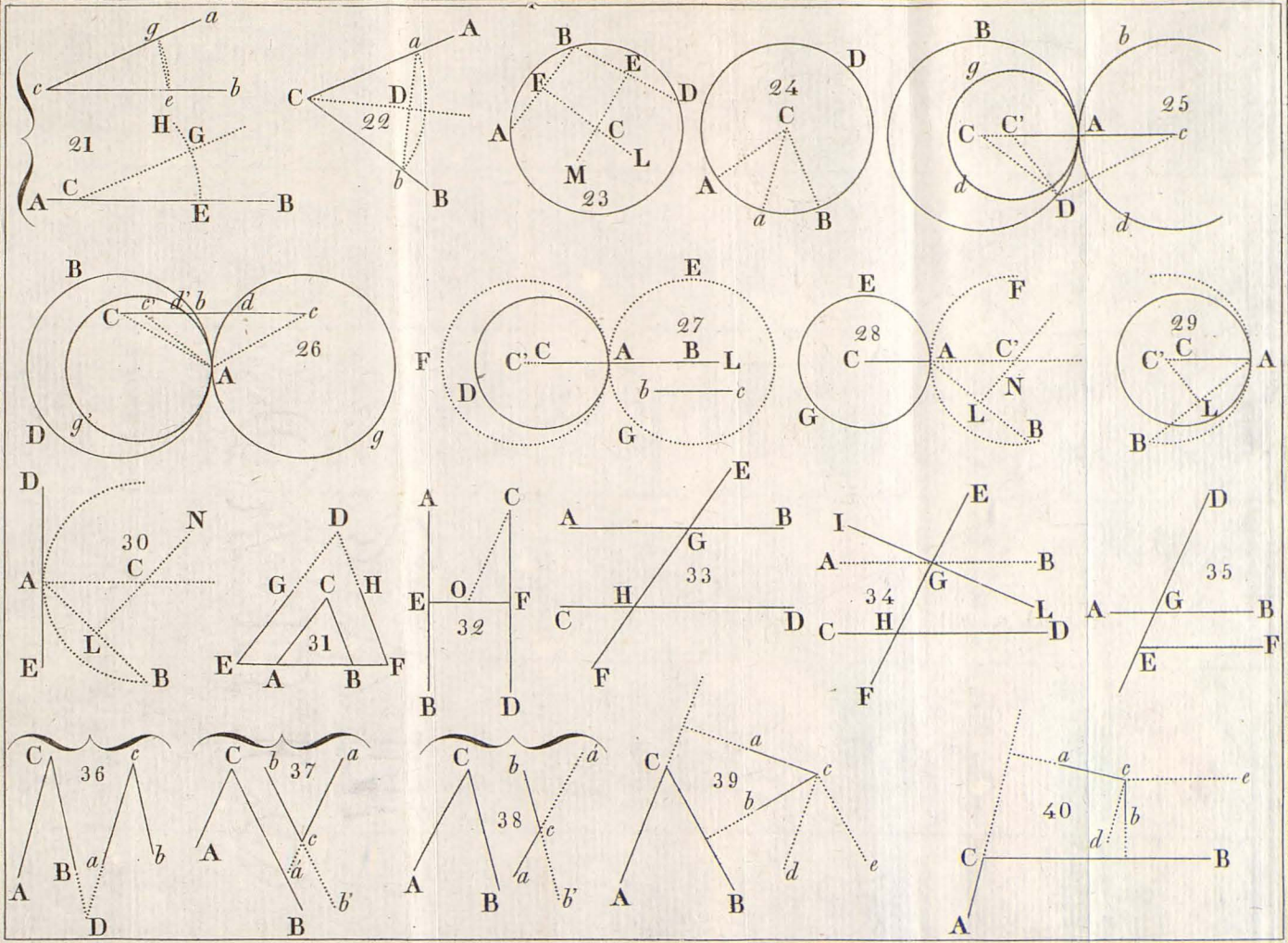
Antonio José de Moura.

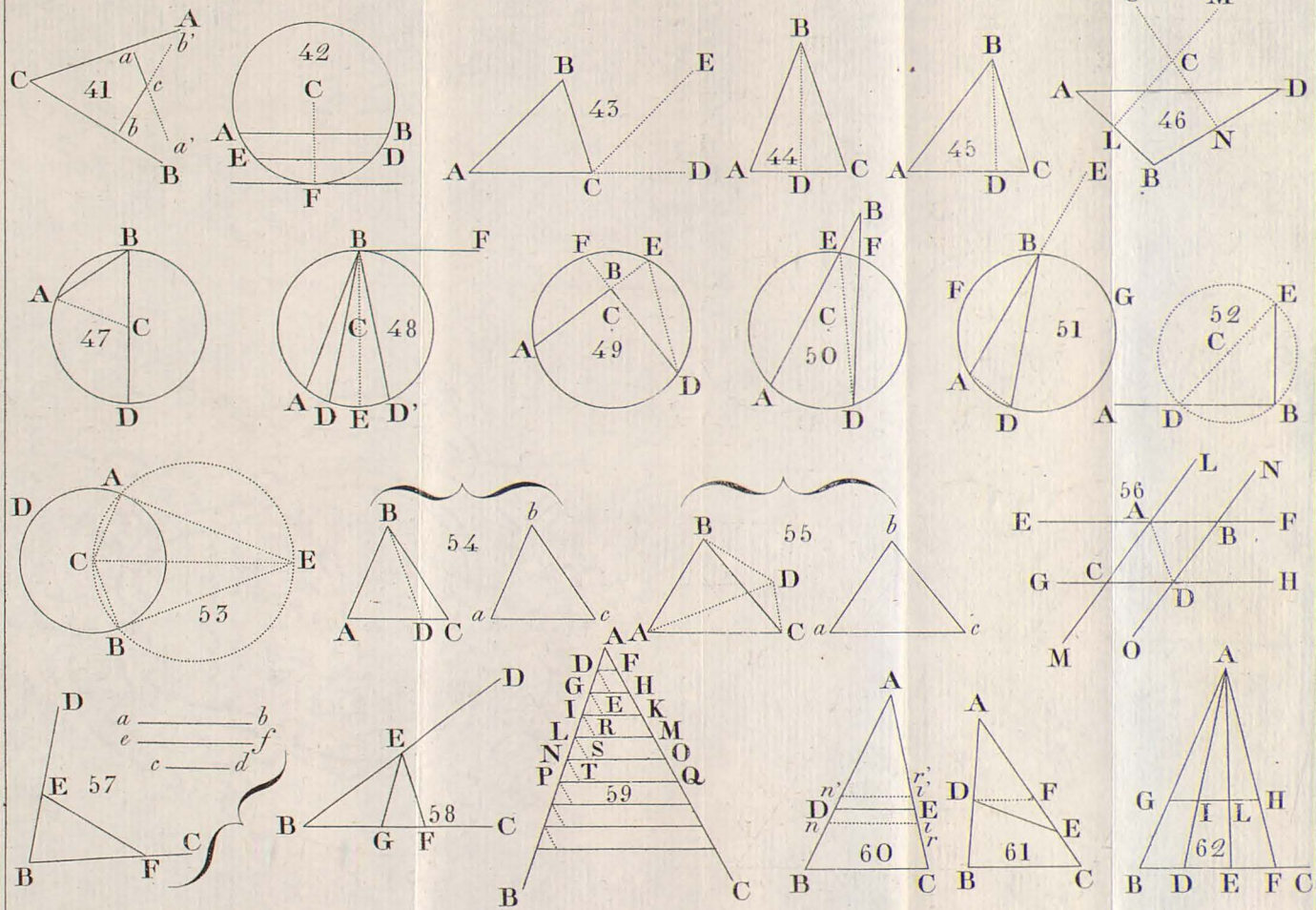
João Chrysostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

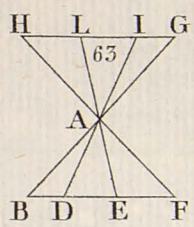
Registado na Chancellaria Mor da Corte e Reino no Livro de Officios e Mercês a fl. 68. Lisboa 21 de Maio de 1781.

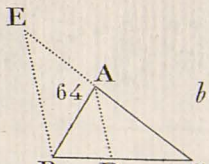
Matheus Rodrigues Vianna.

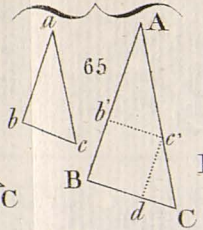

A 1 B
D F E
A 2 C B
B D E 3 A F C
a D á A C 4 E B
C 5 A B
G F C 6 A B
7 C A B D E
E C 8 D F A B r i G i r
A' A F' F 9 B E C G D
C 10 E A D B F
C 11 E A D B r n F
A E 12 C B D
C 13 A D B
C 14 A B D
E C H G F C'' 15 A B
C C'' 16 A D E B C'
C' 17 A D C E B
C 18 A B
A 20 E C F' F B D
A 19 E G C F B D

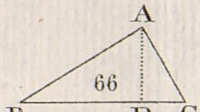

21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

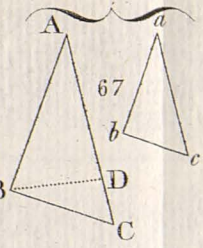

41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

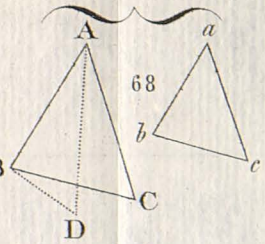

H L I G
63
A
B D E F

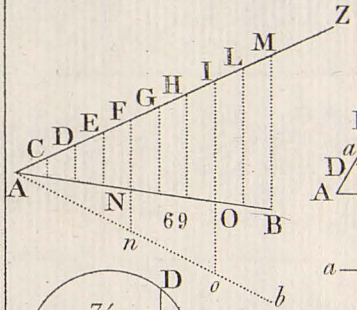

E
64
A
B D C

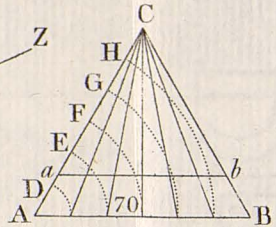

a
A
65
b
b'
c
c'
B
d
C

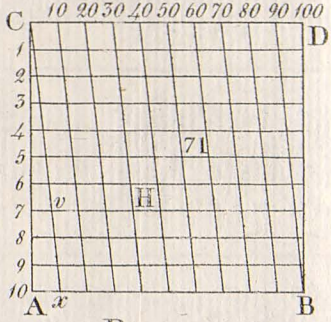

A
66
B D C

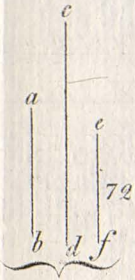

A
a
67
b
c
D
B
C

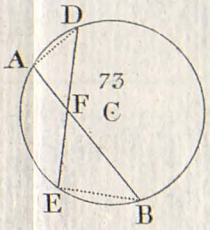

A
a
68
b
c
B
C
D

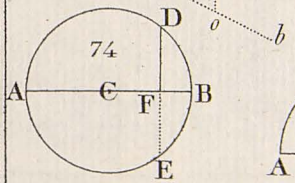

Z
M
L
I
H
G
F
E
D
C
A
N
69
O
B
n
o
b

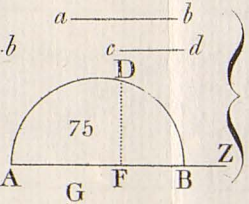

C
H
G
F
E
a
b
D
A
70
B

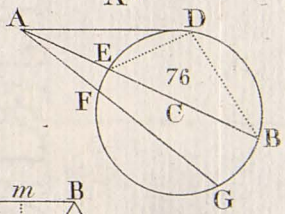

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
C
D
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
71
v
H
A
x
B

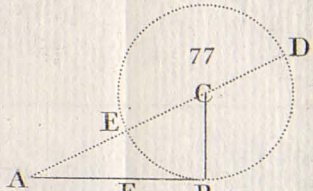

e
a
c
72
b
d
f

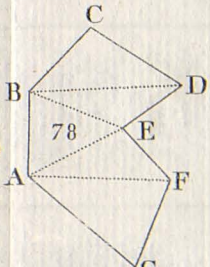

D
A
73
F
C
E
B

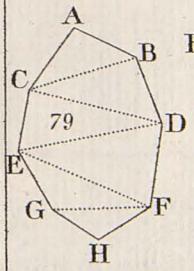

D
74
A
C
F
B
E

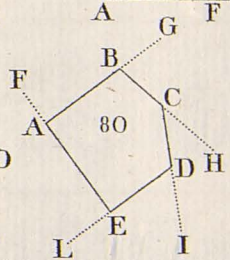

a
b
c
d
D
75
A
F
B
Z

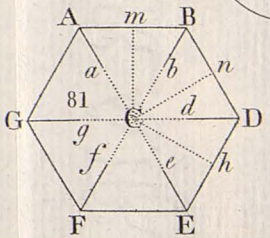

A
D
E
76
F
C
B
G

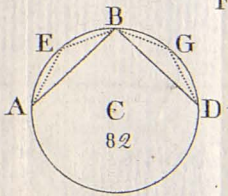

77
D
C
E
A
F
B

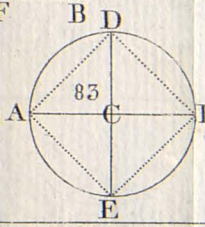

C
B
D
78
E
A
F
G

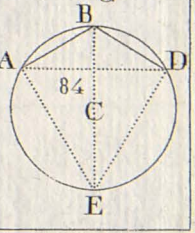

A
B
C
79
D
E
G
F
H

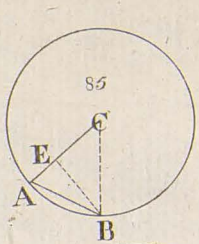

G
B
F
C
A
80
D
H
L
E
I

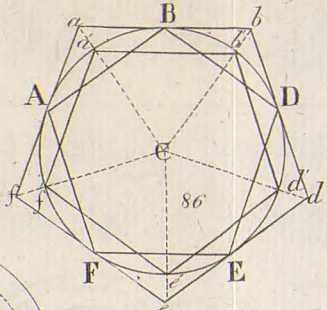

A
m
B
a
b
n
81
G
C
d
D
g
f
e
h
F
E

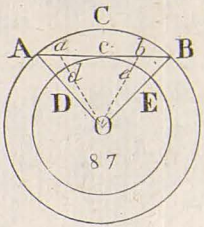

B
E
G
A
C
D
82

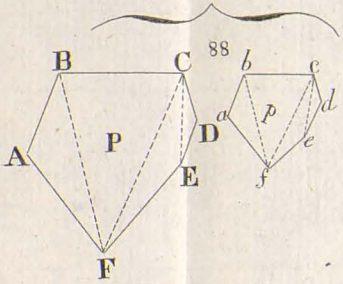

D
A
83
C
B
E

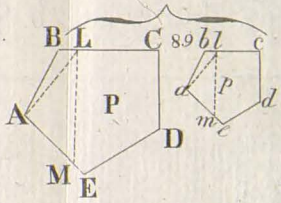

B
A
D
84
C
E

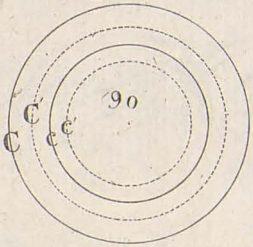

85
C
E
A
B

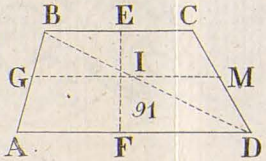

B
a
b
A
D
C
86
F
E

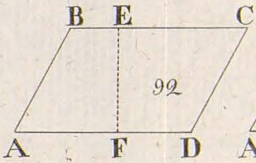

C
A
a
c
b
B
d
e
D
E
87

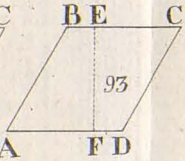

B
C
88
b
c
A
P
D
a
d
e
E
f
F

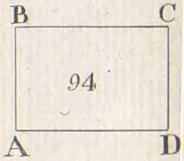

B
L
C
89
b
c
A
P
d
D
m
M
E

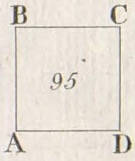

90
C
C
c
c'

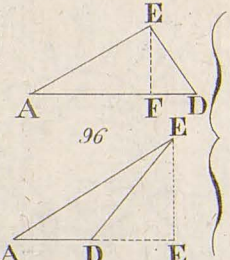

B
E
C
G
I
M
91
A
F
D

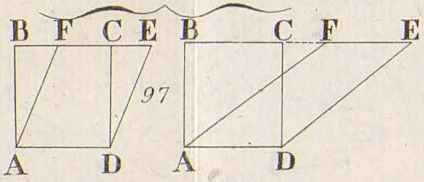

B
E
C
92
A
F
D

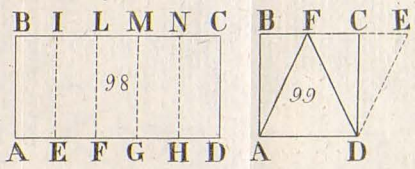

B
E
C
93
A
F
D


B
C
94
A
D

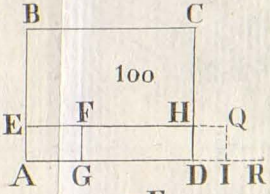

B
C
95
A
D

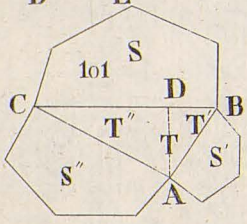

E
A
F
D
96
E
A
D
E

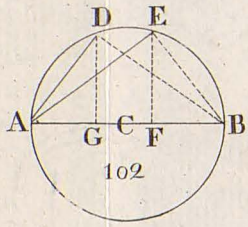

B
F
C
E
B
C
F
E
97
A
D
A
D

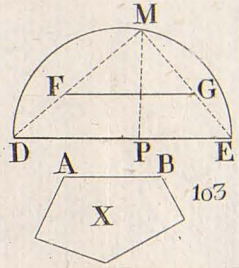

B
I
L
M
N
C
98
A
E
F
G
H
D

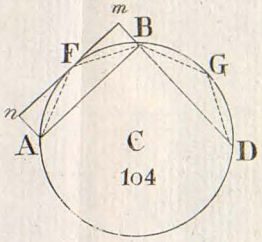
B
F
C
E
99
A
D

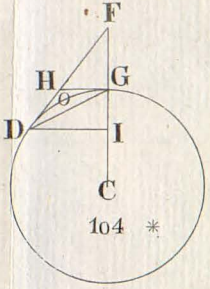

B
C
100
E
F
H
Q
A
G
D
I
R

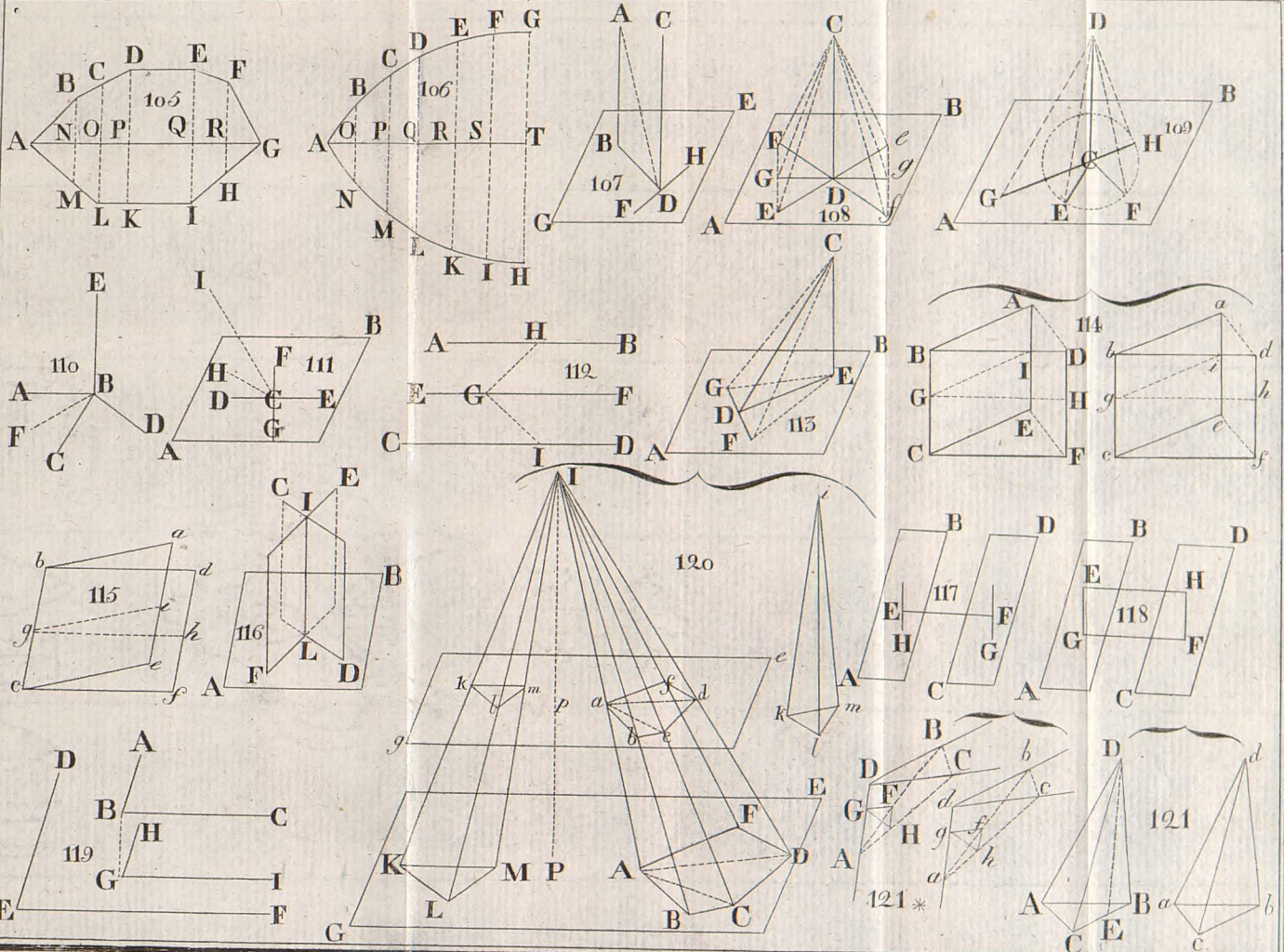

S
101
C
D
B
T''
T
T'
S'
S''
A

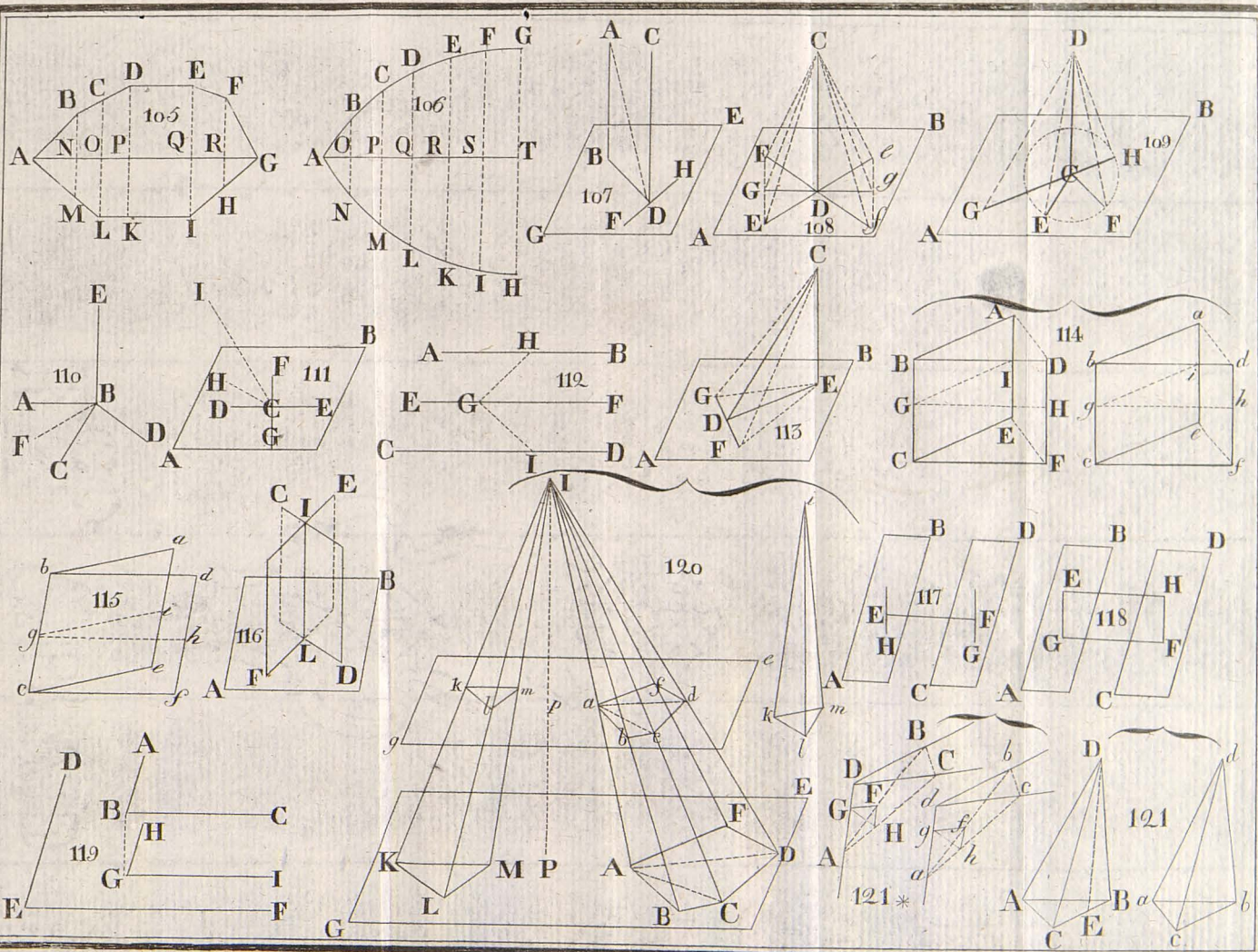

D
E
A
G
C
F
B
102

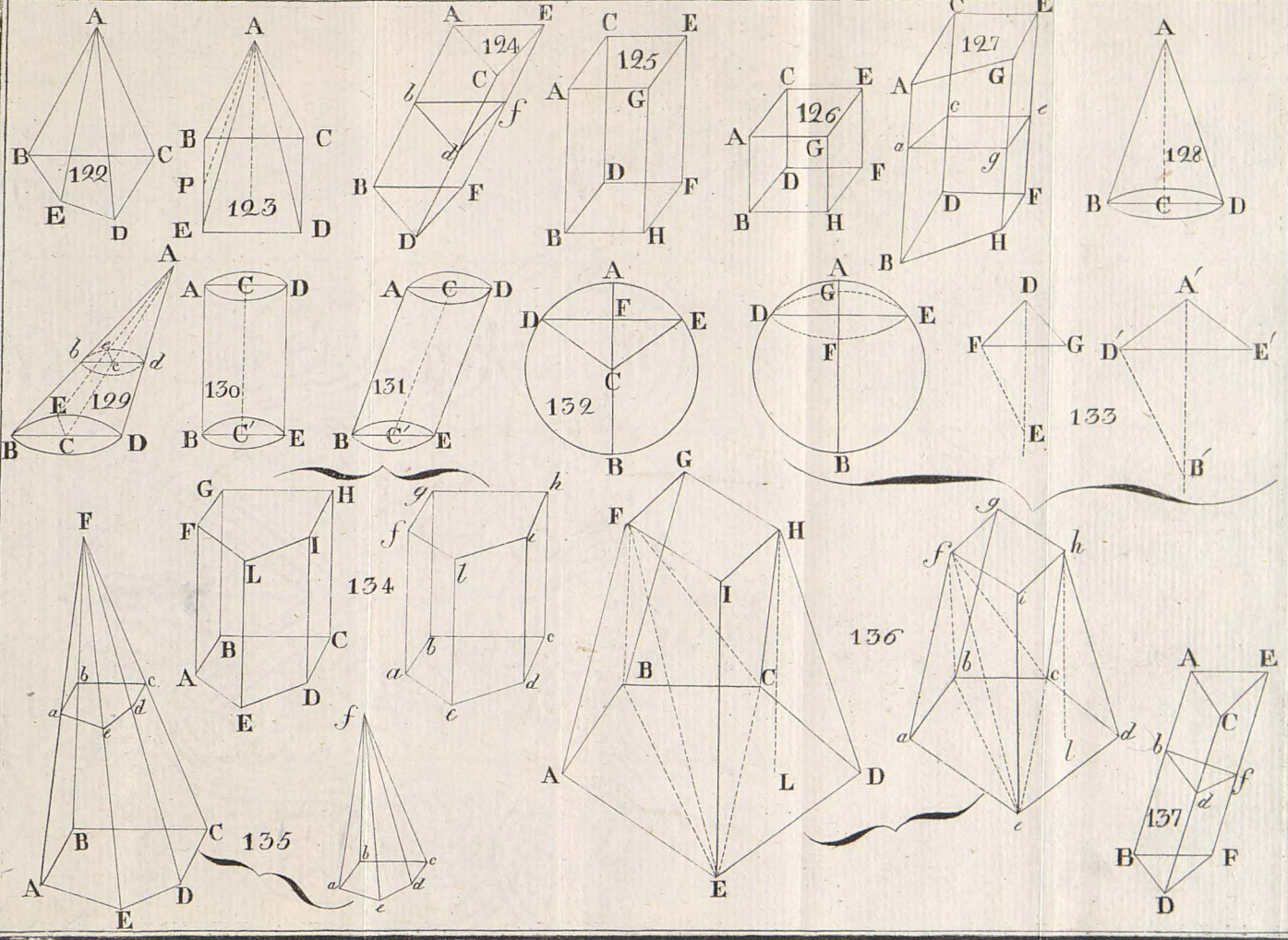

M
F
G
D
A
P
B
E
103
X

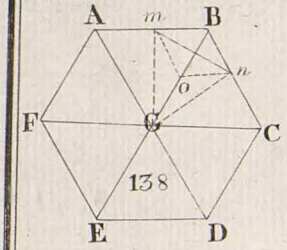

m
B
F
G
n
A
C
D
104

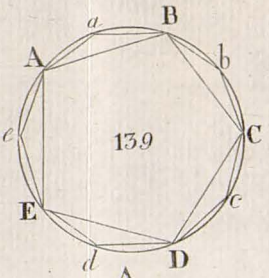

F
H
G
D
I
C
104 *

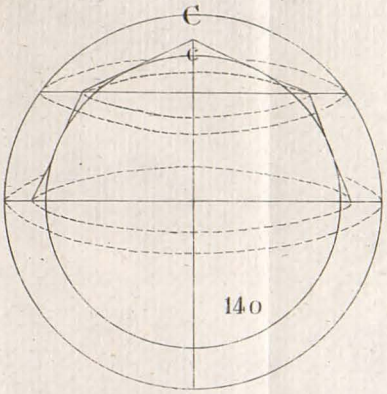

105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
121 *

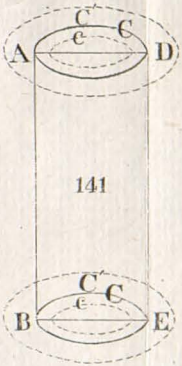

105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
121 *

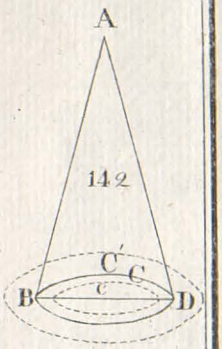

122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137

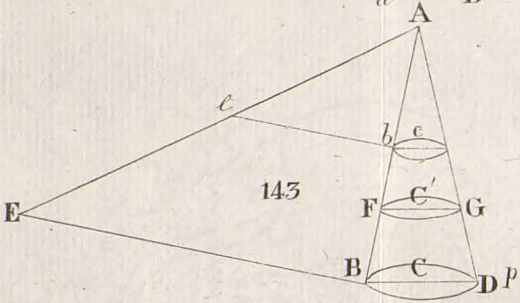

A
m
B
n
o
F
G
C
138
E
D

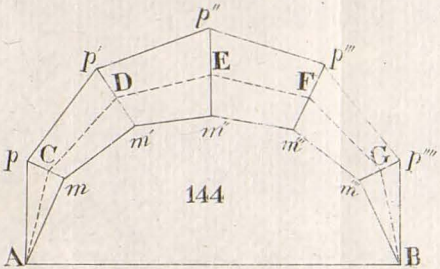

a
B
A
b
e
139
C
E
c
d
D

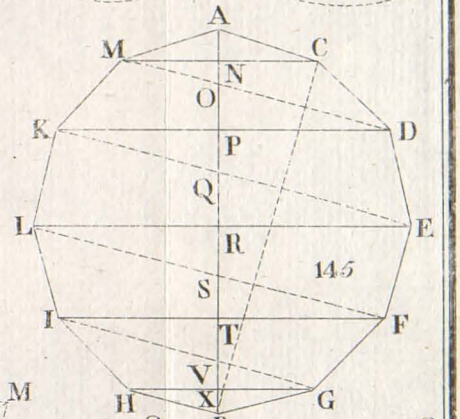

C
c
140

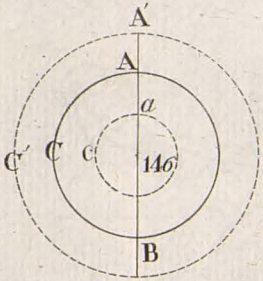

C'
c
C
A
D
141
C'
C
B
c
E

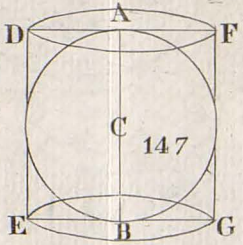

A
142
C'
C
B
c
D

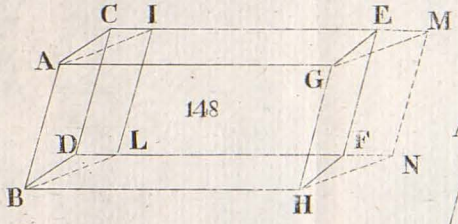

A
e
b
c
143
E
F
C'
G
B
C
D

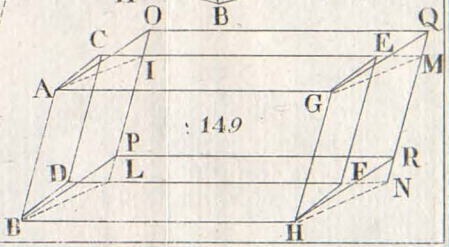

p''
p'
E
p'''
D
F
C
m'
m''
m'''
G
p
p'''
m
144
m
A
B

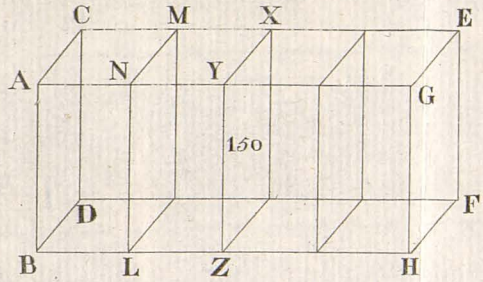

A
M
C
N
O
K
D
P
Q
L
E
R
145
S
I
F
T
V
H
X
G
B

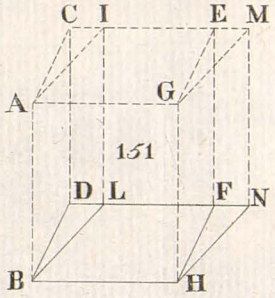

A'
A
a
C'
C
c
146
B

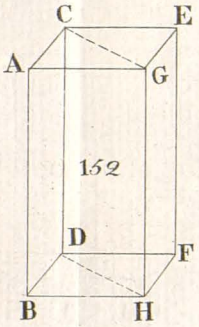

D
A
F
C
147
E
B
G

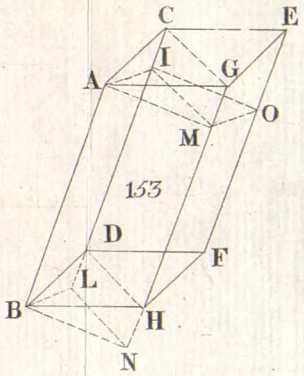

C
I
E
M
A
G
148
D
L
F
N
B
H

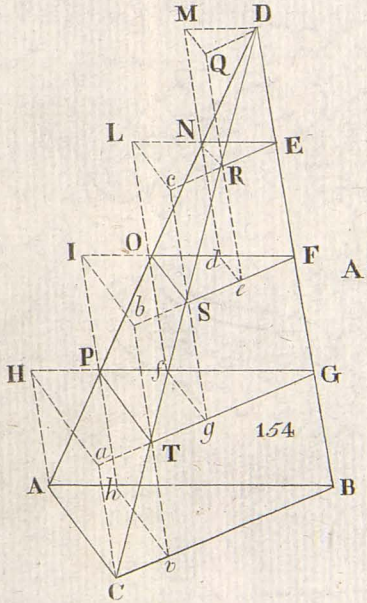

O
Q
C
E
I
M
A
G
149
P
D
L
F
R
N
B
H

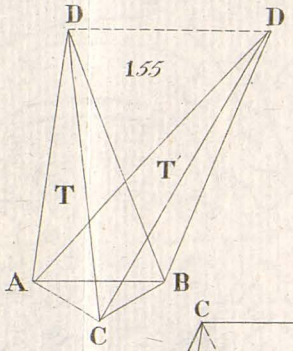

C M X E
A N Y G
150
D F
B L Z H

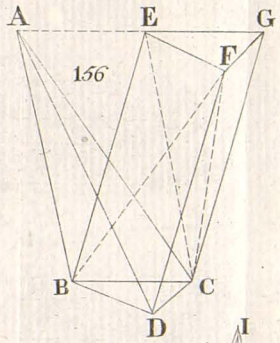

C I E M
A G
151
D L F N
B H

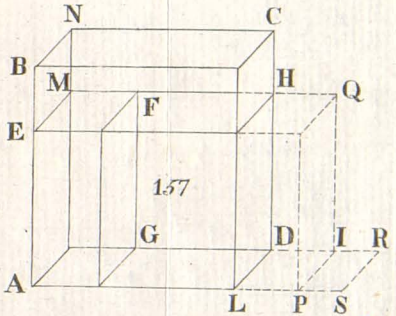

C E
A G
152
D F
B H

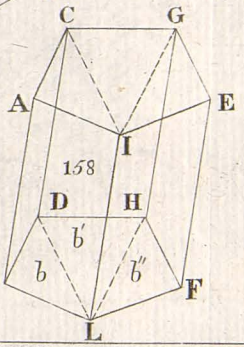

C E
A I G
O
M
153
D F
L
B H
N

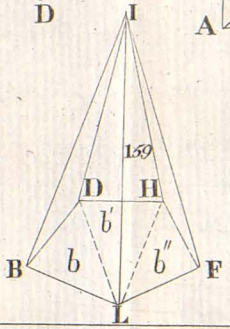

M D
Q
L N E
c R
I O F
d
b S c
P
H f G
g
154
a T
A h B
C v

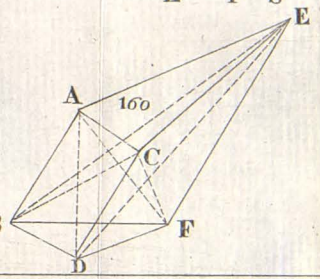

D D
155
T T'
A B
C

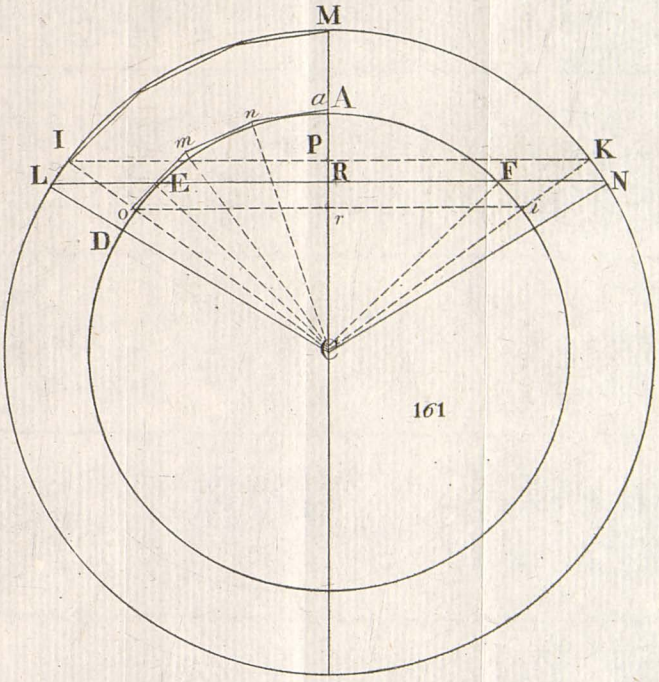

A E G
F
156
B C
D


N C
B M H Q
E F
157
G D I R
A
L P S


C G
A E
I
158
D H
b' b b''
B F
L


I
159
D H
b' b b''
B F
L


E
A
160
C
B F
D


M
a
A
n
I
m
P
K
L
E
R
F
N
o
r
t
D
C
161